(2) Celočíselné polyedry, unimodularita, složitost

Příklad 2.1. Ukažte, že následující formulace celočíselných podmínek jsou ekvivalentní (popisují stejnou přípustnou množinu):

- $P_1 = \{x \in \{0,1\}^4 : 12x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 14\}$,
- $P_2 = \{x \in \{0,1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4\}$,
- $P_3 = \{x \in \{0,1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 + x_4 \leq 1\}$.

Která formulace je podle vás nejvhodnější pro modelování a řešení úlohy celočíselného lineárního programování? Proč?

Řešení:
Můžeme ověřit, že přípustná množina P_1, P_2 i P_3 obsahuje právě celočíselné body

$$Z = \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)\}.$$

Jednotlivé formulace se však liší těsností lineární relaxace, kterou dostaneme nahrazením podmínky celočíselnosti $x \in \{0,1\}^4$ slabší podmínkou $x \in [0,1]^4$. Označme získané lineární relaxace P'_1, P'_2 a P'_3.

Zjevně platí inkluze $P'_1 \supseteq P'_2$, protože nerovnice $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$ je ekvivalentní s $12x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 12$, která je silnějším omezením než podmínka v P'_1. Navíc platí ostrá inkluze $P'_1 \supset P'_2$, např. $(1,0,0,\frac{1}{2}) \in P'_1 \setminus P'_2$.

Dále jistě platí $P'_2 \supseteq P'_3$, jelikož P'_3 obsahuje nadmnožinu omezení P'_2. Opět platí také ostrá inkluze, např. $(\frac{1}{2},0,0,1) \in P'_2 \setminus P'_3$.

Odvodili jsme tedy vztah

$$P'_1 \supset P'_2 \supset P'_3.$$

Vzhledem k těsnosti lineární relaxace proto může být pro řešení dané celočíselné úlohy nejvhodnější formulace P_3, i když obsahuje nejvíc omezení. Navíc lze dokázat, že relaxace P'_3 popisuje přímo konvexní obal množiny Z.

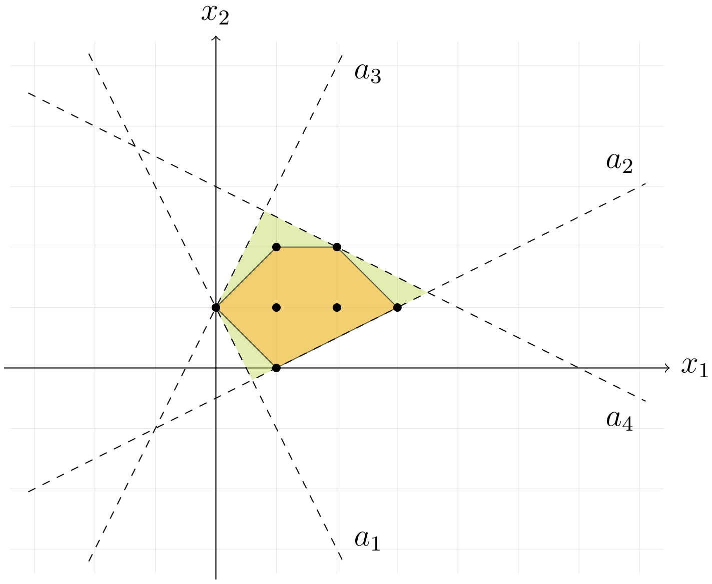
Příklad 2.2. Navrhněte nejlepší formulaci pro popis množiny $P_I = \operatorname{conv}(\mathbb{Z}^2 \cap P)$, kde polyedr P tvoří množina řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Lze nahlédnout (např. graficky), že množina řešení zadané soustavy nerovnic obsahuje právě celočíselné body

$$Z = \{(0,1),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1)\}.$$

Nejlepší formulací daných podmínek tedy bude soustava lineárních nerovnic, pro kterou tvoří množinu přípustných řešení konvexní obal množiny celočíselných bodů Z (viz také obrázek).



Konvexní obal množiny Z můžeme popsat např. jako soustavu nerovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.3. Jsou následující matice (totálně) unimodulární?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Matice A je totálně unimodulární. Můžeme ověřit, že determinanty všech čtvercových podmatic mají hodnotu -1, 0 nebo 1. Pro podmatice 1×1 je podmínka zjevně splněná. Determinant matice A je

$$\det A = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Zbývá ověřit podmínku pro podmatice 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}0} \\ {\color{lightgray}1} & 1 & 0 \\ {\color{lightgray}0} & -1 & -1 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}0} \\ 1 & {\color{lightgray}1} & 0 \\ 0 & {\color{lightgray}-1} & -1 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}0} \\ 1 & 1 & {\color{lightgray}0} \\ 0 & -1 & {\color{lightgray}-1} \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det \begin{pmatrix} {\color{lightgray}-1} & 0 & 0 \\ {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}0} \\ {\color{lightgray}0} & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & {\color{lightgray}0} & 0 \\ {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}0} \\ 0 & {\color{lightgray}-1} & -1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & {\color{lightgray}0} \\ {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}1} & {\color{lightgray}0} \\ 0 & -1 & {\color{lightgray}-1} \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det \begin{pmatrix} {\color{lightgray}-1} & 0 & 0 \\ {\color{lightgray}1} & 1 & 0 \\ {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}-1} \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & {\color{lightgray}0} & 0 \\ 1 & {\color{lightgray}1} & 0 \\ {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}-1} \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & {\color{lightgray}0} \\ 1 & 1 & {\color{lightgray}0} \\ {\color{lightgray}0} & {\color{lightgray}-1} & {\color{lightgray}-1} \end{pmatrix} = -1.$$

Matice B není totálně unimodulární. Z definice musí mít determinant podmatic 1×1 také hodnotu ± 1 nebo 0, totálně unimodulární matice proto mohou obsahovat pouze prvky z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Determinant matice B je -2, není tedy ani unimodulární.

Matice C není totálně unimodulární. Tato matice obsahuje čtvercovou podmatici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pro kterou platí $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$. Determinant matice B je -2, není tedy ani unimodulární.

Příklad 2.4. Přepravní problém (transshipment problem) je modifikací klasického dopravního problému, ve které existují vnitřní uzly umožňující překládku zboží na cestě od dodavatelů ke spotřebitelům.

(a) Formulujte přepravní problém jako úlohu toku v síti.

(b) Formulujte přepravní problém jako dopravní problém.

<u>Řešení:</u>
Uvažujme přepravní problém daný grafem $G = (V, E)$ s množinou m dodavatelů s kapacitami s_i, množinou n spotřebitelů s kapacitami t_j, množinou vnitřních uzlů pro překládku zboží $U \subseteq V$ a cenou přepravy $c(e)$ za jednotku zboží přepravenou po hraně $e \in E$.

(a) Síť vytvoříme na základě grafu G daného přepravního problému, přičemž kapacity existujících hran nastavíme ve vytvořené síti na ∞ a ceny hran na hodnoty $c(e)$. Dále do této sítě doplníme dva nové uzly:

- zdroj s, ze kterého povede hrana k dodavateli i s kapacitou s_i a cenou 0,
- stok t, do kterého povede hrana od spotřebitele j s kapacitou t_j a cenou 0.

Přepravní plány v původním problému pak odpovídají s–t tokům ve vytvořené síti, přičemž cílem je najít tok požadované velikosti $\sum_j t_j$ s minimální cenou.

(b) Každý vnitřní uzel $u \in U$ rozdělíme na nový dodavatelský uzel u_1 a spotřebitelský uzel u_2. Hrany od dodavatelů do u_2 a ke spotřebitelům z u_1 a jejich ceny ponecháme stejné jako pro u v původním problému. Kapacitu s_u uzlu u_1 (pro nabídku zboží) a kapacitu t_u uzlu u_2 (pro poptávku zboží) nastavíme na celkovou kapacitu všech m dodavatelů $k = \sum_{i=1}^{m} s_i$.
Navíc přidáme novou hranu z s_u do t_u s cenou 0, která umožní vyrovnat nabídku a poptávku: Pokud v přepravním problému došlo v uzlu u k překládce x jednotek zboží, pošleme ve vytvořeném dopravním problému $k - x$ jednotek zboží z u_1 do u_2.

Příklad 2.5. Matice $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ je v intervalovém tvaru, pokud mají všechny řádky tvar

$$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

t.j. všechny hodnoty 1 následují za sebou v právě jednom souvislém intervalu. Ukažte, že každá matice v intervalovém tvaru je totálně unimodulární. *(Nápověda: Využijte elementární sloupcové úpravy.)*

<u>Řešení:</u>
Každá čtvercová podmatice matice A je také matice v intervalovém tvaru (při výběru podmatice zachováváme pořadí sloupců). Chceme tedy ukázat, že pro čtvercovou matici $B \in \{0, 1\}^{k \times k}$ v intervalovém tvaru platí $\det B \in \{-1, 0, 1\}$.

Uvažujme sloupcovou úpravu, která odečte i-tý sloupec od sloupce $i+1$. Lze nahlédnout, že tato sloupcová úprava nemění determinant matice. Pokud byla původní matice B v intervalovém tvaru, dostaneme postupným aplikováním této úpravy na sloupce $i = 1, 2, \ldots, k-1$ matici $B' \in \{-1, 0, 1\}^{k \times k}$, která má v každém řádku nanejvýš jednu hodnotu 1 a nanejvýš jednu hodnotu -1. Analogicky důkazu Věty 1.10 (o matici incidence) můžeme dokázat, že upravená matice B', a tedy i matice B, má hodnotu determinantu $\det B' \in \{-1, 0, 1\}$:

- obsahuje-li B' řádek s právě jednou nenulovou hodnotou, použijeme pro tento řádek Laplaceův rozvoj (ovlivňuje pouze znaménko determinantu),
- obsahuje-li B' nulový řádek, pak je $\det B' = 0$,
- obsahuje-li každý řádek právě jednu hodnotu 1 a právě jednu hodnotu -1, pak je matice B' singulární a $\det B' = 0$ (součet všech sloupců je 0).

Příklad 2.6. Buď $G = (V, E)$ vážený orientovaný graf s váhovou funkcí $c\colon E \to \mathbb{R}^+$. Formulujte (celočíselný) lineární program pro nalezení nejkratší cesty ze zdroje $s \in V$ do stoku $t \in V$. Ukažte, že matice omezení vytvořeného programu je totálně unimodulární.

Řešení:
Viz Příklad 1.14 a Větu 1.12 (a důkaz Věty 1.10) ve skriptech.

Příklad 2.7. Buď $\sigma(\cdot)$ velikost bitového zápisu daného (racionálního) čísla. Ukažte, že pro celá čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sigma(a+b) \leq \sigma(a) + \sigma(b).$$

Řešení:
Pro $z \in \mathbb{Z}$ dostaneme dosazením $z = \frac{z}{1}$ do definice $\sigma(\cdot)$ rovnost

$$\sigma(z) = 1 + \lceil \log_2(|z|+1) \rceil + \lceil \log_2(|1|+1) \rceil = 2 + \lceil \log_2(|z|+1) \rceil.$$

Pro součet $a+b$ tedy platí $\sigma(a+b) = 2 + \lceil \log_2(|a+b|+1) \rceil$. Dále využijeme fakt, že funkce $\log_2(\cdot)$ je rostoucí, a pro absolutní hodnotu platí nerovnost $|x+y| \leq |x| + |y|$. Můžeme tedy odvodit odhad

$$\sigma(a+b) = 2 + \lceil \log_2(|a+b|+1) \rceil \leq 2 + \lceil \log_2(|a|+|b|+1) \rceil.$$

Na druhou stranu pro součet $\sigma(a) + \sigma(b)$ platí díky nerovnosti $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ odhad

$$\sigma(a) + \sigma(b) = 4 + \lceil \log_2(|a|+1) \rceil + \lceil \log_2(|b|+1) \rceil \geq 4 + \lceil \log_2(|a|+1) + \log_2(|b|+1) \rceil,$$

a z vlastností logaritmu dále dostaneme

$$4 + \lceil \log_2(|a|+1) + \log_2(|b|+1) \rceil = 4 + \lceil \log_2((|a|+1)(|b|+1)) \rceil.$$

Roznásobením argumentu logaritmu a jednoduchým odhadem pak snadno nahlédneme, že dokazovaná nerovnost platí:

$$\begin{aligned}\sigma(a+b) &\leq 2 + \lceil \log_2(|a|+|b|+1) \rceil \leq 2 + \lceil \log_2(|a|+|a||b|+|b|+1) \rceil \\ &\leq 4 + \lceil \log_2(|a|+|a||b|+|b|+1) \rceil \leq 4 + \lceil \log_2((|a|+1)(|b|+1)) \rceil \leq \sigma(a)+\sigma(b).\end{aligned}$$