(5) Speciální případy: Problém batohu, TSP a další

Příklad 5.1. Řešte problém batohu pomocí metody branch-and-bound:

$$\begin{array}{lr} \max & 17x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 17x_4 \\ \text{za podm.} & 5x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ 8x_3 + \ \ 7x_4 \leq 12, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

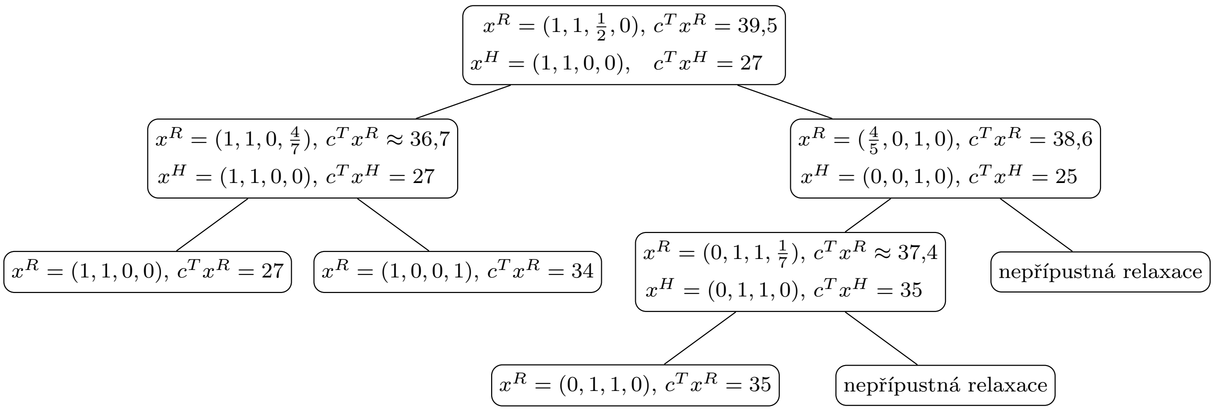
Řešení:

Využijeme fakt, že optimální řešení lineární relaxace x^R můžeme (pro setříděné proměnné podle $\frac{c_i}{a_i}$) explicitně vyjádřit jako

$$x_1^R = \cdots = x_{r-1}^R = 1, \quad x_r^R = \frac{b - \sum_{i=1}^{r-1} a_i}{a_r}, \quad x_{r+1}^R = \cdots = x_n^R = 0,$$

pro určité $r \in \{1, \ldots, n\}$. Z relaxace též získáme heuristické přípustné řešení x^H se složkami $x_i^H = x_i^R$ pro $i \neq r$ a $x_r^H = 0$. V každém rozvětvení pak uvažujeme podproblémy s podmínkou $x_r = 0$ nebo $x_r = 1$ pro dané r. (Viz také Příklad 7.16 ve skriptech.)

Aplikací metody branch-and-bound dostaneme následující strom výpočtu:



Optimální řešení zadané instance problému batohu je tedy $x = (0, 1, 1, 0)$ s hodnotou 35.

Příklad 5.2. Vyřešte následující instanci problému batohu pseudopolynomiálním algoritmem:

$$\begin{array}{lr} \max & x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 + 2x_5 \\ \text{za podm.} & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + \ \ x_5 \leq 7, \\ & x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Řešení:

Viz Příklad 7.6 ve skriptech.

Příklad 5.3. Uvažujme problém batohu z předcházejícího příkladu.

(a) Najděte optimální řešení lineární relaxace a využijte jej ke konstrukci sečné nadroviny typu „cover“.

(b) Použijte lifting pro zesílení řezu a vyřešte lineární relaxaci nové úlohy.

Řešení:
Viz Příklad 7.15 ve skriptech.

Příklad 5.4. Aplikujte na symetrickou úlohu TSP na vrcholech $v_1, \dots, v_5$ s maticí vzdáleností

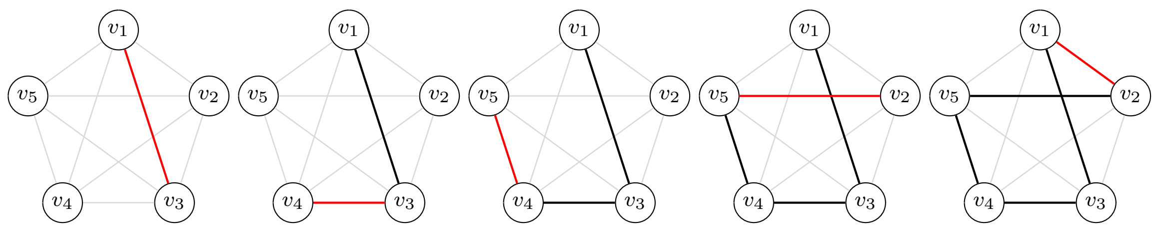
$$\begin{pmatrix} - & 8 & 4 & 9 & 9 \\ 8 & - & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & - & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 5 & - & 4 \\ 9 & 10 & 6 & 4 & - \end{pmatrix},$$

následující heuristiky:

(a) nejbližší soused (nearest neighbor),
(b) hladový algoritmus,
(c) metoda úspor (savings),
(d) vkládání nejbližšího (nearest insertion),
(e) metoda minimální kostry,
(f) metoda 2-výměn.

Řešení:

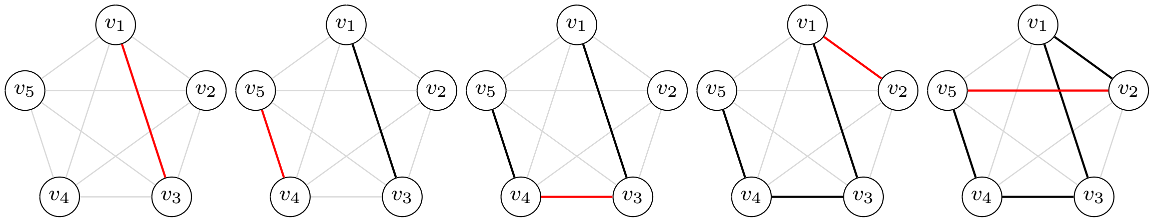
(a) Zvolíme počáteční vrchol, např. v_1. Postupně se přesouváme do nejbližšího sousedního vrcholu (který jsme ještě nenavštívili) k aktuálně poslednímu vrcholu nalezené cesty. Dostaneme tedy cestu v_1-v_3-v_4-v_5-v_2, kterou doplníme na kružnici návratem po hraně $\{v_2, v_1\}$. Délka nalezené kružnice je $4 + 5 + 4 + 10 + 8 = 31$.



(b) Hladový algoritmus postupně tvoří hledanou kružnici přidáváním nejkratší hrany, která neporuší přípustnost řešení (nevytvoří menší kružnici ani vrchol stupně 3). Setřídíme hrany grafu podle délky od nejkratší a aplikujeme hladový algoritmus:

$\{v_1, v_3\}$	$c_{1,3} = 4$	$X = \{\{v_1, v_3\}\}$,
$\{v_4, v_5\}$	$c_{4,5} = 4$	$X = \{\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$,
$\{v_3, v_4\}$	$c_{3,4} = 5$	$X = \{\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}$,
$\{v_2, v_3\}$	$c_{2,3} = 6$	přeskočíme, v_3 už má stupeň 2,
$\{v_3, v_5\}$	$c_{3,5} = 6$	přeskočíme, v_3 už má stupeň 2,
$\{v_2, v_4\}$	$c_{2,4} = 7$	přeskočíme, v_4 už má stupeň 2,
$\{v_1, v_2\}$	$c_{1,2} = 8$	$X = \{\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}\}$,
$\{v_1, v_4\}$	$c_{1,4} = 9$	přeskočíme, v_1 už má stupeň 2,
$\{v_1, v_5\}$	$c_{1,5} = 9$	přeskočíme, v_1 už má stupeň 2,
$\{v_2, v_5\}$	$c_{2,5} = 10$	$X = \{\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_5\}\}$.

Pomocí hladového algoritmu tedy také najdeme kružnici v_1-v_3-v_4-v_5-v_2-v_1 délky 31.

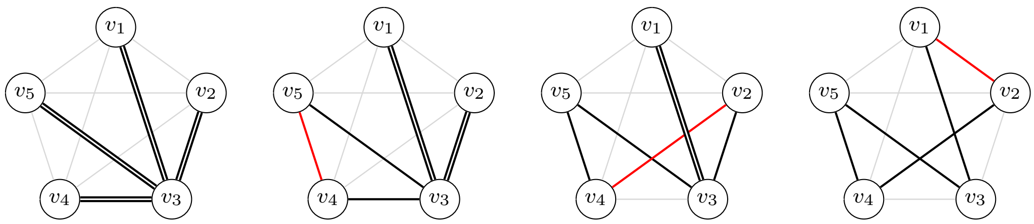


(c) Nejprve vytvoříme počáteční sled vrcholů tak, že ze zvoleného „centrálního“ vrcholu v_k postupně navštívíme všechny sousední vrcholy v_i a vrátíme se zpět do v_k. Např. pro centrální vrchol v_3 dostaneme počáteční sled ve tvaru v_3-v_1-v_3-v_2-v_3-v_4-v_3-v_5-v_3. Následně spočteme hodnoty $s_{ij} = c_{ki} + c_{kj} - c_{ij}$ pro všechna $i, j \neq k$, t.j. úspory dosažené nahrazením sledů v_k-v_i-v_k a v_k-v_j-v_k jedním sledem (zkratkou) $v_k - v_i - v_j - v_k$. Aktuální sled upravíme pomocí nejvýhodnější nalezené zkratky.

Pro zadanou instanci a centrální vrchol v_3 máme matici úspor S s koeficienty s_{ij}:

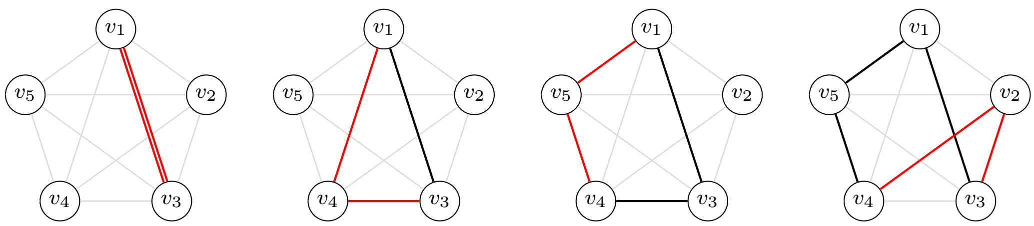
$$S = \begin{pmatrix} - & 2 & 0 & 1 \\ 2 & - & 4 & 2 \\ 0 & 4 & - & 7 \\ 1 & 2 & 7 & - \end{pmatrix}.$$

Do počátečního sledu tedy postupně přidáme nejvýhodnější zkratky s úsporami s_{45}, s_{24}, s_{12}. Získáme kružnici v_1-v_3-v_5-v_4-v_2-v_1 délky 29.

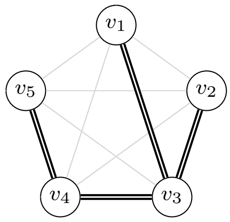


(d) Pro zvolený počáteční vrchol, např. v_1, vytvoříme sled s jeho nejbližším sousedním vrcholem: v_1-v_3-v_1. Následně do aktuálního sledu S vkládáme vrchol v_i, který je nejblíže k nějakému vrcholu $v_j \in S$ (a zároveň platí $v_i \notin S$). Vrchol v_i napojíme mezi v_j a jeho souseda $v_k \in S$ tak, aby vzdálenost $c_{ij} + c_{ik} - c_{jk}$ byla minimální.

K některému z vrcholů v_1, v_3 počátečního sledu je nejblíže vrchol v_4 se vzdáleností $d(v_3, v_4) = 5$, jeho vložením dostaneme sled v_1-v_3-v_4-v_1. Dále vkládáme vrchol v_5 (vzdálenost 4 k vrcholu v_4), přičemž volíme mezi napojením v_3-v_5-v_4 nebo v_4-v_5-v_1. První způsob vložení má cenu $c_{35} + c_{45} - c_{34} = 6 + 4 - 5 = 5$, druhý způsob má cenu $c_{4,5} + c_{1,5} - c_{1,4} = 4 + 9 - 9 = 4$, získáme tedy sled v_1-v_3-v_4-v_5-v_1. Nakonec vložíme zbývající vrchol v_2 (nejbližší pro v_3) mezi vrcholy v_3 a v_4. Výsledná kružnice má tvar v_1-v_3-v_2-v_4-v_5-v_1 a délku 30.

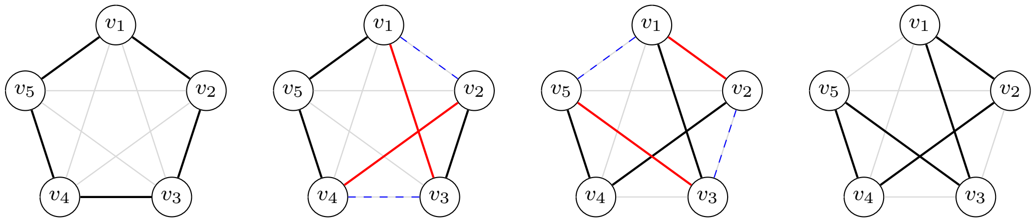


(e) Nejprve nalezneme minimální kostru zadaného grafu a zdvojením všech hran získáme počáteční sled. Můžeme nahlédnout, že minimální kostru tvoří hrany (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4) a (v_4, v_5), získaný sled má tedy tvar v_1-v_3-v_2-v_3-v_4-v_5-v_4-v_3-v_1. Dále vytvoříme kružnici tak, že při průchodu sledu přeskočíme už navštívené vrcholy a použijeme hranu do následujícího nenavštíveného vrcholu sledu (případně do prvního vrcholu). Konkrétně, z vrcholu v_2 pokračujeme přímo do v_4 a z vrcholu v_5 zpět do v_1, čímž získáme kružnici v_1-v_3-v_2-v_4-v_5-v_1 délky 30.



(f) Najdeme nějakou počáteční hamiltonovskou kružnici, kterou budeme postupně vylepšovat. Můžeme zvolit např. kružnici v_1-v_2-v_3-v_4-v_5-v_1 délky 32. Metoda 2-výměn spočívá v odstranění 2 hran a jejich nahrazení 2 novými hranami tak, aby vznikla nová (a v ideálním případě lepší) hamiltonovská kružnice.

Můžeme ověřit, že nejlepší možná 2-výměna pro danou kružnici je nahrazení hran (v_1, v_2) a (v_3, v_4) hranami (v_1, v_3) a (v_2, v_4), což vede na kružnici v_1-v_3-v_2-v_4-v_5-v_1 s délkou 30. Následně můžeme provést výměnu hran (v_2, v_3) a (v_1, v_5) za hrany (v_1, v_2) a (v_3, v_5) a dostaneme kružnici v_1-v_2-v_4-v_5-v_3-v_1 délky 29.



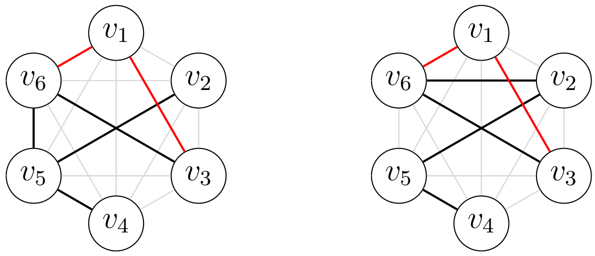
Příklad 5.5. Řešte Lagrangeovu relaxaci založenou na 1-stromech pro symetrické TSP s maticí vzdáleností

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 10 & - & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & - & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & - & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & - & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 & - \end{pmatrix}.$$

Řešení:

V této relaxaci hledáme minimální 1-strom, který můžeme sestrojit jako minimální kostru na podgrafu na vrcholech $v_2, \dots, v_n$ s přidanými dvěma nejkratšími hranami z vrcholu v_1 (hamiltonovská kružnice je speciálním případem 1-stromu).

Pro zadanou matici vzdáleností tvoří minimální kostru podgrafu množina hran $\{(v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$, nebo také cesta v_3-v_6-v_2-v_5-v_4, obě s cenou 7. Nejkratší hrany z vrcholu v_1 vedou do vrcholů v_3 a v_6, dostaneme tedy řešení relaxace s optimální hodnotou $c_{1,3} + c_{1,6} + 7 = 2 + 2 + 7 = 11$.



Příklad 5.6. Využijte lineární relaxaci, hladový algoritmus a lokální vylepšování pro řešení úlohy UFLP s cenami

$$C' = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Viz Příklad 10.3 ve skriptech.

Příklad 5.7. Označme $[n] = \{1, \dots, n\}$. Buď P konvexní obal množiny všech bodů splňujících omezující podmínky modelu UFLP pro $m = 2$, t.j.

$$z_{1j} + z_{2j} = 1 \ \ \forall j \in [n], \quad 0 \le z_{ij} \le y_i \ \ \forall i \in \{1,2\}, j \in [n], \quad y_1, y_2 \in \{0,1\}.$$

Dokažte, že $z_{ij} \le y_i$ je stěnová nerovnost pro P pro každé $i \in \{1,2\}$ a $j \in [n]$. Umíte důkaz zobecnit pro libovolné $m \in \mathbb{N}$?

Řešení:
Pro jednoduchost odvodíme důkaz pro $i = j = 1$, tedy ukážeme, že nerovnost $z_{11} \le y_1$ je stěnová (pro jiná i, j lze důkaz formulovat analogicky). Uvažovaná nerovnost je zjevně platná pro všechny body mnohostěnu P, jelikož patří mezi omezující podmínky definující množinu P.

Označme $\dim(P) = d$. Abychom ukázali, že daná nerovnost definuje stěnu P dimenze $d-1$ (t.j. fasetu), musíme najít d afinně nezávislých bodů mnohostěnu P, které leží v nadrovině $z_{11} = y_1$. Mnohostěn P se nachází v prostoru dimenze $2n+2$ (dle počtu proměnných), platí tedy $d \le 2n+2$. Tento mnohostěn ale není plnodimenzionální – v popisu P máme n rovnic s lineárně nezávislými vektory, které způsobí, že $\dim(P)$ bude

$$d = 2n + 2 - n = n + 2.$$

Tuto vlastnost můžeme také ověřit nalezením $d+1$ (t.j. $n+3$) afinně nezávislých bodů z P.

Nerovnost $z_{11} \le y_1$ je tedy stěnová, pokud existuje $d = n+2$ afinně nezávislých bodů mnohostěnu P v nadrovině $z_{11} = y_1$. Uvažujme vektory $(z_{11}, \dots, z_{1n}, z_{21}, \dots, z_{2n}, y_1, y_2)$ s koeficienty

$$\begin{aligned} z_1 &= (1, \dots, 1), & z_2 &= (0, \dots, 0), & y_1 &= 1, & y_2 &= 0, \\ z_1 &= (1, \dots, 1), & z_2 &= (0, \dots, 0), & y_1 &= 1, & y_2 &= 1, \\ z_1 &= (0, \dots, 0), & z_2 &= (1, \dots, 1), & y_1 &= 0, & y_2 &= 1, \end{aligned}$$

tedy řešení, ve kterých obsluhujeme všechny spotřebitele z jednoho zařízení. Dále uvažujme vektory reprezentující řešení s obsluhou 2 spotřebitelů ze zařízení 1, a to spotřebitele 1 a některého dalšího spotřebitele $j \in \{2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1, 1, 0, 0, \dots, 0), \quad z_2 = (0, 0, 1, 1, \dots, 1), \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \\
z_1 &= (1, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad z_2 = (0, 1, 0, 1, \dots, 1), \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \\
&\vdots \\
z_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 1), \quad z_2 = (0, 1, 1, \dots, 1, 0), \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $3 + n - 1 = n + 2$ vektorů, které splňují podmínku $z_{11} = y_1$ a patří do mnohostěnu P. Navíc lze nahlédnout, že tyto vektory jsou afinně nezávislé (např. ověřením lineární nezávislosti $n + 1$ „posunutých" vektorů), dokázali jsme tedy, že nerovnost $z_{ij} \leq y_i$ pro $i = j = 1$ je stěnová.

Pro $m \in \mathbb{N}$ dostaneme mnohostěn P dimenze $d = mn + m - n$. Analogickou konstrukcí jako v případě $m = 2$ můžeme nalézt d afinně nezávislých bodů ležících v nadrovině $z_{ij} = y_i$ a dokázat, že nerovnost $z_{ij} \leq y_i$ bude opět stěnová.