2 Intervalové lineární soustavy

Úloha 1. Dokažte, že x^* leží v množině řešení $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}x^* \cap \boldsymbol{b} \neq \emptyset$. [3 b]

Úloha 2. Následující vlastnosti jsou nutné pro regularitu intervalové matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Rozhodněte, které z podmínek jsou také postačující:

a) Matice $A_{yz} = A^c + \mathrm{diag}(y)A^\Delta \mathrm{diag}(z)$ je regulární pro každé $y, z \in \{\pm 1\}^n$. [2 b]

b) Všechny matice A tvaru $a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\}$ jsou regulární. [2 b]

Úloha 3. Intervalová matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ je *nezáporně invertibilní* pokud $A^{-1} \geq 0$ pro každou $A \in \boldsymbol{A}$. Buď $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ regulární. Dokažte, že $\boldsymbol{A}$ je nezáporně invertibilní pokud splňuje následující podmínky:

a) $\rho(I_n - \underline{A}) < 1, \overline{A} \leq I_n, \forall i\colon \boldsymbol{a}_{ii} = 1,$ [2 b]

b) $\rho(I_n - \underline{A}) < 1, \overline{A} \leq I_n, \forall i\colon \underline{a}_{ii} \geq 1.$ [2 b]

Úloha 4. Uvažujte funkci mající následující ekvivalentní formy:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1, \\ g(x) &= 1 + x(-6 + x(15 + x(-20 + x(15 + x(-6 + x))))), \\ h(x) &= (x-1)^6. \end{aligned}$$

Vypočtěte obálky $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ a $h(\boldsymbol{x})$ pro dané $\boldsymbol{x} = [0.999, 1.001]$. [2 b]

Úloha 5. Rovnice zapojení eletrického obvodu je vyjádřena jako

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Pro $V_1 = 10$, $V_2 = 5$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1000 \pm 10\%$ nalezněte obálku pro I_1 a I_2. Zkuste využít a porovnat ruzné metody (Intlab, Versoft, vlastní implementace, ...). Dokážete využít závislosti parametrů k nalezení tesnejší obálky? [6 b]

Úloha 6. Vytvořte program, který pro náhodně zvolenou počáteční matici

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

náhodně zvolený vektor $b = (b_1, b_2)^T$ a hodnoty $\delta \in \{0.1, 0.2, \ldots, 1.0\}$ vykreslí množinu řešení soustavy $[A_c - D, A_c + D]x = [b - d, b + d]$, kde $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (resp. $d \in \mathbb{R}^2$) je matice (resp. vektor) obsahující na všech prvcích hodnotu δ. Rozmyslete si, zda lze při fixních A_c a b odhadnout změny v této množině řešení při změně parametru δ. [6 b]