

3 Intervalová lineární algebra

Úloha 1. Spočítejte obálku pro vlastní čísla $\lambda_i(\mathbf{A}^S)$ intervalové matice

$$\begin{pmatrix} -3 & [4, 6] & [-3, -1] \\ [4, 6] & [-5, -1] & [1, 3] \\ [-3, -1] & [1, 3] & -1 \end{pmatrix}. \quad [3 \text{ b}]$$

Úloha 2. Buď $c \in \mathbb{R}$ pevné a $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Dokažte, že testování, zda $c \in \lambda_i(\mathbf{A}^S)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, je NP-těžké. [3 b]

Úloha 3. Buď $\mathbf{v} \in \mathbb{IR}^n$. Najděte intervaly vlastních čísel $\lambda_i(\mathbf{A}^S)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pro diagonální matici $\mathbf{A}^S = \text{diag}(\mathbf{v})$. [3 b]

Úloha 4. Rozhodněte, zda jsou matice $\mathbf{A}^S$, $\mathbf{B}^S$ pozitivně (semi)definitní:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [6, 8] & [-3, -1] & [-2, 0] \\ [-3, -1] & [7, 9] & [1, 3] \\ [-2, 0] & [1, 3] & [4, 6] \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [13, 15] & [3, 7] & [9, 11] \\ [3, 7] & [4, 8] & 5 \\ [9, 11] & 5 & [13, 15] \end{pmatrix}. \quad [4 \text{ b}]$$

Úloha 5. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

- a) Pokud je matice $\mathbf{A}^S$ pozitivně semidefinitní, pak $\lambda_n(A_c) \geq \rho(A_\Delta)$.
- b) Pokud je matice $\mathbf{A}^S$ pozitivně definitní, pak $\lambda_n(A_c) > \rho(A_\Delta)$. [3 b]

Úloha 6. Buď $\det(\mathbf{A}) = \{\det(A) : A \in \mathbf{A}\}$. Lze nahlédnout, že $\det(\mathbf{A})$ je interval. Rozhodněte, zda pro intervalové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a standardní intervalovou aritmetiku platí následující vlastnosti:

- a) $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \cdot \det(\mathbf{A})$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$,
- b) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$,
- c) $\det(S \mathbf{A} S^{-1}) = \det(\mathbf{A})$ pro $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. [4 b]

Úloha 7. Najděte nějaké třídy intervalových matic, pro které lze snadno charakterizovat pozitivní (semi)definitnost a/nebo určit determinant. [5 b]