

4 Obraz funkce & Software

Úloha 1. Dokažte, nebo vyvráťte:

$$\text{a) } f(\cup_{i=1}^n \mathbf{x}_i) = \cup_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i), \quad \text{b) } f(\cap_{i=1}^n \mathbf{x}_i) = \cap_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i). \quad [3 \text{ b}]$$

Úloha 2. Odvoďte vzorce pro sklony daných funkcí vzhledem k $S_f(x, a)$:

$$\text{(a) } f(x)^n, \quad [3 \text{ b}]$$

$$\text{(b) } |f(x)|. \quad [3 \text{ b}]$$

Úloha 3. Uvažujme následující (ekvivalentní) funkce:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1, \\ g(x) &= 1 + x(-6 + x(15 + x(-20 + x(15 + x(-6 + x))))), \\ h(x) &= (x - 1)^6. \end{aligned}$$

Určete intervalové obálky $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ pro interval $\mathbf{x} = [0.999, 1.001]$. [2 b]

Úloha 4. Vypočtěte obálku funkce

$$f(x) = \frac{x_1^3 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

nad $\mathbf{x} = ([2 - \delta, 2 + \delta], [2 - \delta, 2 + \delta])$ postupně pro $\delta \in \{0.01, 0.1, 1\}$ a za použití

(a) přirozeného intervalového rozšíření,

(b) mean value form. [4 b]

Úloha 5. Rovnice zapojení elektrického obvodu je vyjádřena jako

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{pmatrix}.$$

Pro $V_1 = 10$, $V_2 = 5$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1000 \pm 10\%$ nalezněte obálku pro hodnoty I_1 a I_2 . Zkuste využít a porovnat různé metody pro výpočet obálky (vlastní implementaci nebo dostupné balíčky pro intervalové výpočty). Dokážete využít závislosti parametrů k nalezení tesnější obálky? [6 b]

Úloha 6. Dřevěná koule má poloměr 1 m a specifickou tíhu $g_{SP} = \frac{2}{3}$. Hloubka ponoření koule h je dána rovnicí

$$h^3 - 3h^2 + \frac{8}{3} = 0.$$

Nalezněte pomocí intervalových metod odhad (obálku) pro hodnotu h . (Specifická tíha je dána poměrem hustoty daného objektu a hustoty vody o stejném objemu $g_{SP} = \rho_{koule} / \rho_{voda}$.) [4 b]