

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Cv. 9.1 Matici B převedte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Ne všechny matice jsou diagonalizovatelné, například matice B . Všechny matice jsou ale podobné matici v Jordanově normálním tvaru. Ten si nyní pro matici B spočteme.

Hledáme tedy regulární matici S a matici v Jordanově normálním tvaru J takové, že $B = SJS^{-1}$. Začneme stejně, jako kdybychom chtěli ověřit, zda je matice diagonalizovatelná, tedy spočteme vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický polynom vypadá:

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Jádrem matice $(B - 2I)$ má dimenzi 1, konkrétně $\text{Ker}(B - 2I) = \text{span}\{(1, 0, 1)^T\}$. Vlastní číslo $\lambda = 2$ má algebraickou násobnost 2 (je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu), ale jeho geometrická násobnost je rovna 1 (přísluší mu pouze jeden vlastní vektor). Matice B tudíž nemá 3 lineárně nezávislé vlastní vektory.

Přistoupíme tedy k výpočtu zobecněných vlastních vektorů pro vlastní číslo λ_1 . Spočteme $\text{Ker}((B - 2I)^2) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$. Nyní zvolíme zobecněný vlastní vektor x_2 z $\text{Ker}((B - 2I)^2) \setminus \text{Ker}(B - 2I)$, například $x_2 = (0, 0, 1)^T$. Dopočteme vlastní vektor x_1 ,

$$x_1 = (B - 2I)x_2 = (1, 0, 1)^T.$$

Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $\text{span}\{(2, -1, 1)^T\}$. Získáváme hledanou matici S .

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Také vypočteme její inverzi S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici B lze nyní zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = S J S^{-1}.$$

Cv. 9.2 Spočítejte druhou, třetí a 11. mocninu matice B z předchozího příkladu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Využijeme Jordanova normálního tvaru spočteného v předchozím příkladě. Dostáváme $B^2 = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) = SJ^2S^{-1}$. Obdobně $B^3 = SJ^3S^{-1}$. Chceme tedy spočítat druhou a třetí mocninu matice J .

Spočteme J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom druhá mocnina B je rovna:

$$B^2 = S J^2 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obdobně spočteme J^3 :

$$J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A třetí mocnina B je rovna:

$$B^3 = S J^3 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že i mocnění matice v Jordanově normálním tvaru je jednodušší než pro obecné matice. Při mocnění nedochází ke změně mimo jednotlivé Jordanovy buňky (neboli nuly mimo Jordanovy buňky zůstávají zachovány).

Nakonec stejným způsobem spočteme 11. mocninu.

$$J^{11} = \begin{pmatrix} 2^{11} & 11 \cdot 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud 11. mocnina B je rovna:

$$\begin{aligned} B^{11} &= S J^{11} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9216 & -7170 & 11264 \\ 0 & 1 & 0 \\ -11264 & -9217 & 13312 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 9.3 Najděte matici A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $x_1 = (1, 2)^T$ a $x_2 = (2, 5)^T$.

Řešení:

Jelikož jsou vlastní vektory nezávislé, víme, že A je diagonalizovatelná. Konkrétně A lze rozložit na součin SDS^{-1} , kde sloupce S jsou vlastní vektory a D má na diagonále vlastní čísla. Tedy dostáváme

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Spočteme inverzní matici k matici S :

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme dopočítat matici A :

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Matici B převedte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ odpovídá vlastní vektor $(1, 1, 3)^T$ a dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ odpovídá vlastní vektor $(-1, 0, 1)^T$ a zobecněný vlastní vektor $(3, 1, 0)^T$. Tudíž

$$B = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Cv. 9.5 Spočtěte druhou, třetí, 100. a k -tou mocninu matice z předchozího příkladu.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -5 & 17 & -4 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -6 & 21 & -5 \end{pmatrix},$$

$$J^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{100} = \begin{pmatrix} 100 & -397 & 99 \\ -1 & 4 & -1 \\ -103 & 409 & -102 \end{pmatrix},$$

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^k = \begin{pmatrix} k & 3-4k & -1+k \\ -1 & 4 & -1 \\ -3-k & 9+4k & -2-k \end{pmatrix}.$$