(9b) Jordanova normální forma, Symetrické matice

Příklad 9b.1. Najděte všechny možné Jordanovy normální formy pro matici s charakteristickým polynomem $(\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$.

Řešení:
Kořeny charakteristického polynomu, a tedy i vlastními čísly příslušné matice, jsou hodnoty $\lambda = 1$ (s algebraickou násobností 3) a $\lambda = -2$ (s násobností 1). Také vidíme, že stupeň charakteristického polynomu je 4, uvažujeme tedy matici a Jordanovu normální formu řádu 4.

Pro vlastní číslo -2 existuje pouze jeden vlastní vektor (až na násobek), kterému odpovídá jedna Jordanova buňka $J_1(-2)$. Pro vlastní číslo 1 můžou existovat až 3 lineárně nezávislé vlastní vektory. V případě 1 vlastního vektoru dostaneme jednu buňku $J_3(1)$, pro dva vlastní vektory máme dvě Jordanovy buňky, které nutně musí být $J_2(1)$, $J_1(1)$ a pro tři vlastní vektory máme tři buňky $J_1(1)$.

Pro matici s daným charakteristickým polynomem tedy existují tři možné Jordanovy normální formy (až na pořadí buněk):

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9b.2. Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4 s vlastním číslem 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7,

(c) matice řádu 4 s vlastními čísly 5 a 7.

Řešení:
Budeme uvažovat Jordanovy normální formy jako reprezentanty jednotlivých tříd ekvivalence, jelikož každá matice je podobná nějaké matici v JNF.

(a) V tomto případě má vlastní číslo 7 algebraickou násobnost 4, může tedy mít až 4 odpovídající lineárně nezávislé vlastní vektory. Podle počtu vlastních vektorů může mít JNF: jednu buňku $J_4(7)$, dvě buňky $J_1(7), J_3(7)$ nebo $J_2(7), J_2(7)$, tři buňky $J_1(7), J_1(7), J_2(7)$, nebo 4 stejné buňky $J_1(7)$. Celkem tedy existuje 5 tříd ekvivalence.

(b) Uvažované matice mají jedno dvojnásobné vlastní číslo a jedno vlastní číslo s násobností 1. Pro dvojnásobné vlastní číslo máme jeden nebo dva vlastní vektory. Celkem tedy existujou 4 třídy ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c) Pro algebraickou násobnost vlastních čísel 5 a 7 máme možnosti: $1+3$, $2+2$, nebo $3+1$. Vlastní číslo s násobností 1 má 1 vlastní vektor, dvojnásobné vlastní číslo 1 nebo 2 vlastní vektory a trojnásobné vlastní číslo až 3 vlastní vektory. Celkem tedy existuje $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$ tříd ekvivalence.

Příklad 9b.3. Najděte Jordanovu normální formu matic

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Obě matice jsou trojúhelníkové, vlastními čísly jsou tedy přímo prvky na diagonále. Vidíme, že matice mají dvojnásobné vlastní číslo 2 a vlastní číslo 6 s algebraickou násobností 1. Součet velikostí Jordanových buněk pro 2 tedy bude v obou případech 2, pro vlastní číslo 6 máme pouze buňku $J_1(6)$.

(a) Výpočtem zjistíme, že $\operatorname{rank}(A - 2I_3) = 2$, tedy geometrická násobnost vlastního čísla 2 je $3 - 2 = 1$ (máme jeden příslušný vlastní vektor). Jordanova normální forma této matice proto obsahuje jednu buňku $J_2(2)$ pro vlastní číslo 2. Dostáváme tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Výpočtem zjistíme, že $\operatorname{rank}(B - 2I_3) = 1$, geometrická násobnost vlastního čísla 2 je v tomto případě $3 - 1 = 2$. Jordanova normální forma obsahuje dvě buňky $J_1(2)$ a je to diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9b.4. Najděte spektrální rozklad ve tvaru $Q\Lambda Q^T$ (pro Q ortogonální a Λ diagonální) symetrických matic

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory matic. Následně vlastní vektory znormujeme na jednotkovou velikost, v případě více vlastních vektorů odpovídajících stejnému vlastnímu číslu je také ortogonalizujeme.

(a) Vlastní čísla matice jsou kořeny $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$. Příslušné vlastní vektory matice A jsou $x_1 = (-1, 1) \in \operatorname{Ker}(A - 2I_2)$ a $x_2 = (1, 1) \in \operatorname{Ker}(A - 4I_2)$.

Jelikož se jedná o vlastní vektory pro různá vlastní čísla, jsou na sebe kolmé, stačí je proto znormovat: $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$. Získáváme spektrální rozklad s maticemi

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Matice má charakteristický polynom $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$ a vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Odpovídající vlastní vektory jsou např. $x_1 = (1,1,1) \in \operatorname{Ker}(B - 2I_3)$, $x_2 = (-1,0,1) \in \operatorname{Ker}(B + 1I_3)$ a $x_3 = (-1,1,0) \in \operatorname{Ker}(B + 1I_3)$. Vektor x_1 je kolmý na x_2 a x_3, ale vektory x_2 a x_3 na sebe navzájem kolmé nejsou.

Znormováním vektoru x_1 dostaneme vektor $q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1$, podobně pro x_2 dostaneme $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$. K nakolmení vektoru x_3 vůči x_2 můžeme využít Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci:

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, q_2 \rangle q_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), \qquad q_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, y_3.$$

Dostaneme tedy spektrální rozklad s maticemi

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9b.5. Ukažte, že rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení:

Mějme matici A, pro kterou rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ existuje. Chceme dokázat, že taková matice A nutně musí být symetrická, tedy že platí $A^T = A$. Z uvažovaného rozkladu a z vlastností transpozice dostaneme

$$A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = (Q^T)^T \Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A.$$