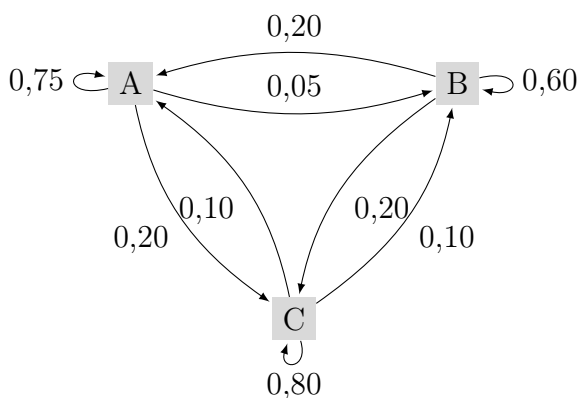


10. Vlastní čísla – Markovovy řetězce a metody výpočtu

Cv. 10.1 Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:

Pravidla pro volby v Matfyzákově ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P , kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i :

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,60 & 0,10 \\ 0,20 & 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu A do stavu A (75 % voličů opět volí stranu Anarchistů), do stavu B (5 % bude volit stranu Bláhových) a do stavu C (20 % volí Cílevědomé).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \dots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S_{1*}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru 2 : 1 : 3.

Jelikož je matice P kladná, výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \text{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$.

Cv. 10.2 Dokažte část Perronovy věty: Pro každé $A > 0$ víme, že $\rho(A)$ je vlastním číslem násobnosti 1 a přísluší mu kladný vlastní vektor (připomeňme, že $\rho(A)$ značí spektrální poloměr matice A , tedy $\max_i |\lambda_i|$). Dokažte, že žádnému jinému vlastnímu číslu nepřísluší nezáporný vlastní vektor.

Řešení:

Označme $\lambda_1 = \rho(A)$ a necht' λ_2 je vlastní číslo matice A s odpovídajícím nezáporným vlastním vektorem $w \geq 0$. Matice A^T je zjevně také kladná a má stejná vlastní čísla, tudíž pro λ_1 můžeme najít příslušný kladný vlastní vektor $v > 0$ matice A^T .

Uvažujme výraz $v^T A w$; jelikož je w vlastním vektorem matice A s vlastním číslem λ_2 , platí

$$v^T A w = v^T (A w) = v^T (\lambda_2 w) = \lambda_2 v^T w.$$

Zároveň je v vlastním vektorem matice A^T , který přísluší vlastnímu číslu λ_1 . Platí tedy $A^T v = \lambda_1 v$, neboli $v^T A = \lambda_1 v^T$, z čehož dostáváme

$$v^T A w = (v^T A) w = (\lambda_1 v^T) w = \lambda_1 v^T w.$$

Odvodili jsme tedy vztah $\lambda_1 v^T w = \lambda_2 v^T w$. Z předpokladů $v > 0, w \geq 0$ (a $w \neq 0$, z definice vlastního vektoru) lze dále snadno nahlédnout, že platí $v^T w > 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$.

Cv. 10.3 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

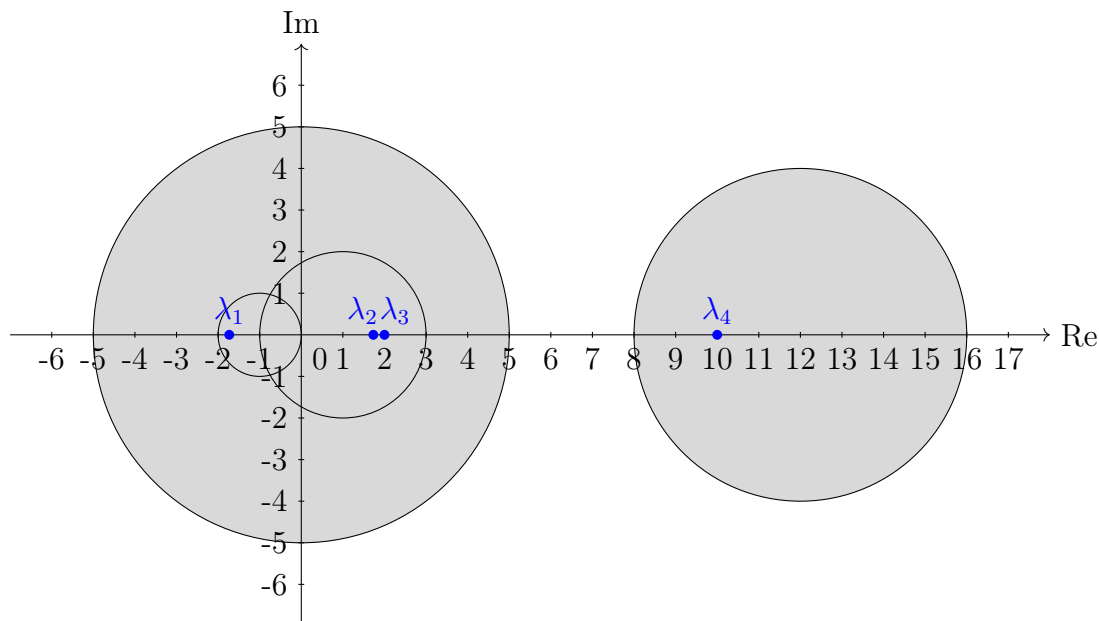
a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in$

$\{1, \dots, 4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

$$\begin{array}{ll} c_1 = a_{11} = 1, & r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2, \\ c_2 = a_{22} = 12, & r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4, \\ c_3 = a_{33} = -1, & r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1, \\ c_4 = a_{44} = 0, & r_4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5. \end{array}$$



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4 .

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12, 4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\overline{\lambda_4}$). V kruhu $B(0, 5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

Cv. 10.4 Aplikujte větu o deflaci (největšího) vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výpočtem zjistíme, že matice A má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a -2 .

Největšímu vlastnímu číslu $\lambda_1 = 6$ odpovídá znormovaný vlastní vektor $v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$. Deflací dostaneme matici

$$\begin{aligned} A' &= A - \lambda_1 v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matice A' má vlastní čísla 0 (trojnásobné) a -2 a stejné vlastní vektory jako matice A . Deflace tedy způsobila změnu vlastního čísla $\lambda_1 = 6$ na $\lambda'_1 = 0$.

Cv. 10.5 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takovou matici $A \geq 0$, že platí postupně vlastnosti

- (a) $\rho(A) = 0$,
- (b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,
- (c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Řešení:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cv. 10.6 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Řešení:

Sestrojte přechodovou matici A pro přesun látky mezi buňkami a spočítejte vektor $A^\infty x_0$ reprezentující limitní stav (můžete využít fakt, že přechodová matice je kladná). Množství látky v buňkách se ustálí v poměru 1 : 2.

Cv. 10.7 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda matice může mít vlastní číslo $\lambda = 0$. Vlastní číslo $\lambda = 0$ nemůže ležet v žádném z disků, matice je proto regulární.