

**Informace o cvičení**

- Stránka cvičení: [http://elif.cz/LA2\\_2122.html](http://elif.cz/LA2_2122.html)
- Kontakt: [elif@kam.mff.cuni.cz](mailto:elif@kam.mff.cuni.cz)
- Podmínky pro udělení zápočtu:
  - Zápočet bude udělen za zisk alespoň 2/3 z celkového počtu bodů (67 ze 100 bodů) za domácí úkoly. V průběhu semestru bude zadáno 5 sérií domácích úkolů.
  - Další bonusové body je možné získat za aktivitu na cvičení.
  - Řešení domácích úkolů můžete odevzdat osobně na cvičení nebo zaslat e-mailem v rozumně čitelné podobě (ideálně jeden pdf soubor).

**Determinanty**

Buď  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pak determinant matice  $A$  je

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)}.$$

**Příklad 1.** Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určete jejich cykly a spočítejte složené permutace  $p \circ q$  a  $q \circ p$ , inverzní permutaci  $p^{-1}$  a znaménka  $\operatorname{sgn}(p)$  a  $\operatorname{sgn}(q)$ .

**Příklad 2.** Vyjádřete vztah pro výpočet determinantu pro matice  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  a pro trojúhelníkové matice  $n \times n$ .

**Skalární součin a ortogonalita**

Buď  $\langle x, y \rangle$  skalární součin, např.  $\langle x, y \rangle = x^T y$  pro  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Norma indukovaná skalárním součinem je definovaná  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Vektory  $x, y \in \mathbb{R}^n$  jsou kolmé, pokud  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Matice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ortogonální, pokud  $Q^T Q = I_n$ .

**Příklad 3.** Spočítejte skalární součin  $\langle x, y \rangle$ , normu  $\|x\|$  a rozhodněte, zda jsou vektory  $x$  a  $y$  navzájem kolmé (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu  $\langle x, y \rangle = x^T y$ ):

- $x = (1, -4)^T$ ,  $y = (8, 2)^T$ ,
- $x = (4, 2, 3)^T$ ,  $y = (1, 5, -2)^T$ .

**Příklad 4.** Jaké vlastnosti platí pro sloupce ortogonálních matic? Je součet nebo součin ortogonálních matic opět ortogonální matice?

**Vlastní čísla a diagonalizace**

Bud'  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $A$  a  $x \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jemu příslušný vlastní vektor, pokud  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ .

**Příklad 5.** Pro komplexní čísla  $a = 3 - 4i$ ,  $b = 1 + 2i$  spočítejte komplexně sdružené číslo  $\bar{b}$ , součet  $a + b$ , součin  $a \cdot b$ , podíl  $\frac{a}{b}$  a absolutní hodnotu  $|a|$ .

**Příklad 6.** Ověřte, že  $\lambda_1 = i$  a  $\lambda_2 = -i$  jsou vlastními čísly matice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Jaké jsou příslušné vlastní vektory  $x_1$  a  $x_2$ ?

---

**Positivně (semi-)definitní matice**

Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symetrická. Pak  $A$  je positivně semidefinitní, pokud  $x^T Ax \geq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}^n$ . Matice  $A$  je positivně definitní, pokud  $x^T Ax > 0$  pro všechna  $x \neq 0$ .

**Příklad 7.** Ukažte, že matice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  je positivně semidefinitní. Je také positivně definitní?

**Příklad 8.** Mějme positivně semidefinitní matice  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Je jejich součet  $A + B$  nebo násobek  $\alpha \cdot A$  pro  $\alpha \in \mathbb{R}$  opět positivně semidefinitní matice?

---

**Bilineární a kvadratické formy**

Bud'  $V$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$ . Bilineární forma je zobrazení  $b : V^2 \rightarrow \mathbb{T}$ , které je lineární v obou složkách, t.j.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, \forall u, v, w \in V$ :

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w), \quad b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v).$$

Matice  $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$  bilineární formy  $b$  vzhledem k bázi  $B = \{w_1, \dots, w_n\}$  prostoru  $V$  je definována předpisem  $a_{ij} = b(w_i, w_j)$ .

**Příklad 9.** Ověřte, že zobrazení  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dané předpisem

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 10x_2 y_2$$

je bilineární formou.

**Příklad 10.** Určete matici bilineární formy  $b(x, y)$  z Příkladu 9 vzhledem ke kanonické bázi v prostoru  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$ .