

Positivně (semi-)definitní matice a Choleského rozklad

Př. 1. Otestujte pozitivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

- (a) rekuretního vzorce,
- (b) Sylvestrova pravidla,
- (c) Gaussovy eliminace.

Př. 2. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou pozitivně definitní matice. Rozhodněte, zda je pozitivně definitní také součet $A + B$, inverzní matice A^{-1} a mocnina A^k pro $k \in \mathbb{N}$.

Př. 3. Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relaci $\preceq$ předpisem $A \preceq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání (splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu).

Př. 4. Otestujte pozitivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Př. 5. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Př. 6. Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$