

Bilineární a kvadratické formy

Př. 1. Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

- (a) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
- (b) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
- (c) $c: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
- (d) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,

Řešení:

- (a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u + \beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u, v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v, u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x, y) = [x]_B^T A [y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bázi B . Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x, y) = x^T A y = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

- (b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1u_2 + \beta w_1v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$. Forma b tedy není bilineární.

- (c) Pokusme se nalézt matici C reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T C y = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Snadno vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c tedy není bilineární.

- (d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba vyřešit rovnici

$$x^T D y = \mathbf{d}_{11}x_1y_1 + \mathbf{d}_{12}x_1y_2 + \mathbf{d}_{21}x_2y_1 + \mathbf{d}_{22}x_2y_2 = \mathbf{1}x_1y_1 + \mathbf{1}x_1y_2 + \mathbf{2}x_2y_2.$$

Vyřešením rovnice dostáváme matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická.

Př. 2. Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x, y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x, x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x, x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= \mathbf{b}_{11}x_1^2 + \mathbf{2b}_{12}x_1x_2 + \mathbf{b}_{22}x_2^2 = \mathbf{3}x_1^2 + \mathbf{5}x_1x_2 + \mathbf{5}x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2,5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x, y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Př. 3. Buď $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnota* kvadratické formy b definujeme jako $\text{rank}(b) := \text{rank}(B)$. Dokažte, že $\text{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Řešení:

Různé maticové reprezentace odpovídají různým bázím, v jejichž souřadnicích pracujeme. Tedy pokud A_1 a A_2 jsou maticové reprezentace formy b vůči bázím B_1 a B_2 , potom platí

$$b(x, y) = [x]_{B_1}^T A_1 [y]_{B_1} = [x]_{B_2}^T A_2 [y]_{B_2}.$$

Dále víme, že matice A_1 a A_2 jsou svázány vztahem takzvané *kongruence*, který udává přechod mezi reprezentacemi $A_1 = S^T A_2 S$. Matice S je zde maticí přechodu $S = {}_{B_2}[id]_{B_1}$.

Uvažujme tedy dvě maticové reprezentace A_1 a A_2 formy b . Protože matice přechodu S i S^T jsou regulární, zachovává se při maticovém násobení hodnota. Platí proto, že

$$\text{rank}(A_2) = \text{rank}(S^T A_1 S) = \text{rank}(A_1),$$

tedy nutně dvě maticové reprezentace stejné kvadratické formy mají stejnou hodnotu. Proto $\text{rank}(b)$ je dobře definovaná ve smyslu, že není závislá na volbě maticové reprezentace.

Př. 4. Buď $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g .

Řešení:

Díky vlastnostem bilinearity můžeme nejprve *sloučit informaci* o vektorech x a y , tedy vzít $x + y$, a následným aplikováním g na $x + y$ dostáváme

$$g(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y).$$

Nyní odečteme *dílčí informace* o jednotlivých vektorech, tedy $g(x) = b(x, x)$ a $g(y) = b(y, y)$ a dostáváme,

$$g(x + y) - g(x) - g(y) = b(x, y) + b(y, x) = 2b(x, y).$$

Algebraickou úpravou dostáváme výsledné vyjádření

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(g(x + y) - g(x) - g(y)).$$

Všimněme si, že nebýt symetrie, tak náš postup selže, neboť linearita nebude dostatečně silná na to, abychom rozlišili $b(x, y)$ a $b(y, x)$.

Př. 5. Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

pozitivně definitní.

Řešení:

Symetrická matice této formy vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Forma je pozitivně definitní právě tehdy, když její matice je pozitivně definitní. To ověříme Sylvestrovým kritériem:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 1, \\ \det(A_2) &= 1, \\ \det(A_3) &= 4 \end{aligned}$$

Všechny determinanty jsou kladné, matice je pozitivně definitní a tedy i daná kvadratická forma.

Př. 6. Mějme danu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma pozitivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Řešení:

Matice formy se od předchozí liší jen nepatrně,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření pozitivní definitnosti vyjdou první dva determinanty stejně jako v předchozím příkladu, stačí tedy vypočítat pouze

$$\det(A_3) = -a^2 + 2a + 3 = -(a - 3)(a + 1).$$

Jeho hodnota bude kladná pro $a \in (-1, 3)$, takže matice A , resp. kvadratická forma g , je pozitivně definitní právě tehdy, když a leží v intervalu $(-1, 3)$.

Kvadratická forma g nemůže být negativně definitní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, neboť $g((1, 0, 0)^T) = 1 > 0$ nezávisle na volbě parametru a .

Bilineární a kvadratické formy

Př. 1. Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

- (a) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
- (b) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
- (c) $c: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
- (d) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
- (e) $e: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Řešení:

- (a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u + \beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u, v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v, u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x, y) = [x]_B^T A [y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bází B . Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x, y) = x^T A y = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

- (b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1u_2 + \beta w_1v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$. Forma b tedy není bilineární.

- (c) Pokusme se nalézt matici C reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T C y = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Snadno vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c tedy není bilineární.

- (d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba vyřešit rovnici

$$x^T D y = \mathbf{d}_{11}x_1y_1 + \mathbf{d}_{12}x_1y_2 + \mathbf{d}_{21}x_2y_1 + \mathbf{d}_{22}x_2y_2 = \mathbf{1}x_1y_1 + \mathbf{1}x_1y_2 + \mathbf{2}x_2y_2.$$

Vyřešením rovnice dostáváme matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická.

- (e) V tomto případě musíme postupovat pouze z definice. Linearita v první složce

$$e(\alpha U + \beta V, W) = (\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW = \alpha e(U, W) + \beta e(V, W)$$

platí díky linearitě maticového násobení. Obdobně tomu je i s linearitou v druhé složce.

Aby platila symetrie, musela by platit komutativita maticového násobení, tedy $e(X, Y) = XY = YX = e(Y, X)$. To víme, že obecně neplatí, tedy zobrazení e je bilineární forma, která není symetrická.

Př. 2. Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x, y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x, x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x, x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= \mathbf{b}_{11}x_1^2 + \mathbf{2b}_{12}x_1x_2 + \mathbf{b}_{22}x_2^2 = \mathbf{3}x_1^2 + \mathbf{5}x_1x_2 + \mathbf{5}x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2,5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x, y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Př. 3. Buď $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnota* kvadratické formy b definujeme jako $\text{rank}(b) := \text{rank}(B)$. Dokažte, že $\text{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Řešení:

Různé maticové reprezentace odpovídají různým bázím, v jejichž souřadnicích pracujeme. Tedy pokud A_1 a A_2 jsou maticové reprezentace formy b vůči bázím B_1 a B_2 , potom platí

$$b(x, y) = [x]_{B_1}^T A_1 [y]_{B_1} = [x]_{B_2}^T A_2 [y]_{B_2}.$$

Dále víme, že matice A_1 a A_2 jsou svázány vztahem takzvané *kongruence*, který udává přechod mezi reprezentacemi $A_1 = S^T A_2 S$. Matice S je zde maticí přechodu $S = {}_{B_2}[id]_{B_1}$.

Uvažujme tedy dvě maticové reprezentace A_1 a A_2 formy b . Protože matice přechodu S i S^T jsou regulární, zachovává se při maticovém násobení hodnota. Platí proto, že

$$\text{rank}(A_2) = \text{rank}(S^T A_2 S) = \text{rank}(A_1),$$

tedy nutně dvě maticové reprezentace stejné kvadratické formy mají stejnou hodnotu. Proto $\text{rank}(b)$ je dobře definovaná ve smyslu, že není závislá na volbě maticové reprezentace.

Př. 4. Buď $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g .

Řešení:

Díky vlastnostem bilinearity můžeme nejprve *sloučit informaci* o vektorech x a y , tedy vzít $x + y$, a následným aplikováním g na $x + y$ dostáváme

$$g(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y).$$

Nyní odečteme *dílčí informace* o jednotlivých vektorech, tedy $g(x) = b(x, x)$ a $g(y) = b(y, y)$ a dostáváme,

$$g(x, y) - g(x, x) - g(y, y) = b(x, y) + b(y, x) = 2b(x, y).$$

Algebraickou úpravou dostáváme výsledné vyjádření

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(x, x) - g(y, y)).$$

Všimněme si, že nebýt symetrie, tak náš postup selže, neboť linearita nebude dostatečně silná na to, abychom rozlišili $b(x, y)$ a $b(y, x)$.

Př. 5. Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

pozitivně definitní.

Řešení:

Symetrická matice této formy vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Forma je pozitivně definitní právě tehdy, když její matice je pozitivně definitní. To ověříme Sylvestrovým kritériem:

$$\begin{aligned}\det(A_1) &= 1, \\ \det(A_2) &= 1, \\ \det(A_3) &= 4\end{aligned}$$

Všechny determinanty jsou kladné, matice je pozitivně definitní a tedy i daná kvadratická forma.

Př. 6. Mějme danu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma pozitivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Řešení:

Matice formy se od předchozí liší jen nepatrně,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření pozitivní definitnosti vyjdou první dva determinanty stejně jako v předchozím příkladu, stačí tedy vypočítat pouze

$$\det(A_3) = -a^2 + 2a + 3 = -(a - 3)(a + 1).$$

Jeho hodnota bude kladná pro $a \in (-1, 3)$, takže matice A , resp. kvadratická forma g , je pozitivně definitní právě tehdy, když a leží v intervalu $(-1, 3)$.

Kvadratická forma g nemůže být negativně definitní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, neboť $g((1, 0, 0)^T) = 1 > 0$ nezávisle na volbě parametru a .