

Bilineární a kvadratické formy

Př. 1. Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

- (a) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
- (b) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
- (c) $c: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
- (d) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
- (e) $e: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Př. 2. Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Př. 3. Buď $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnota* kvadratické formy b definujeme jako $\text{rank}(b) := \text{rank}(B)$. Dokažte, že $\text{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Př. 4. Buď $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g .

Př. 5. Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

pozitivně definitní.

Př. 6. Mějme danu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma pozitivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Bilineární a kvadratické formy

Př. 1. Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

- (a) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
- (b) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
- (c) $c: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
- (d) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
- (e) $e: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Př. 2. Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Př. 3. Buď $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnota* kvadratické formy b definujeme jako $\text{rank}(b) := \text{rank}(B)$. Dokažte, že $\text{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Př. 4. Buď $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g .

Př. 5. Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

pozitivně definitní.

Př. 6. Mějme danu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma pozitivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?