

Determinanty – Metody pro výpočet

Př. 1. Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Budeme počítat z definice:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ &\quad - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= -9 \end{aligned}$$

Determinant matice je -9 .

(b) Budeme řešit pomocí Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det se násobí } -1) \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det se zmenší 2-krát)} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det se nemění)} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det se nemění)} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det se násobí } -1) \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}. && \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)} \end{aligned}$$

Dostáváme horní trojúhelníkovou matici. Existuje jediná permutace σ taková, že

$$\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \neq 0,$$

a to identita. Determinant vzniklé horní trojúhelníkové matice je $(-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 30$. A tedy determinant původní matice je 60.

- (c) Použijeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Následný výpočet determinantů matic velikosti 2×2 provedeme z definice.

$$\begin{aligned}
 \det(C) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1) \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1) + 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Determinant matice je 2.

- (d) Nejprve použijeme elementární řádkové úpravy a upravíme matici následovně. Využíváme pouze elementární úpravu „přičtení k -násobku i -tého řádku k j -tému“. Tato úprava nemění determinant, a tak získáváme:

$$\begin{aligned}
 \det(D) &= \det \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že permutace $\sigma \in S_3$ přispívá k celkovému součtu v hledaném determinantu *nenulovou* hodnotou právě tehdy, když vybírá první sloupec v prvním řádku a třetí sloupec ve třetím řádku, tj. $\sigma(1) = 1$ a $\sigma(3) = 3$. Taková permutace v S_3 je však právě jedna – identická permutace. Tedy determinant výsledné matice je roven součinu jejích diagonálních prvků $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Vzhledem k tomu, že provedené řádkové úpravy neměnily determinant, je determinant původní matice také 1001.

Př. 2. Určete determinanty následujících matic $n \times n$:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}, \\
 \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix} \quad \text{pro } a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Řešení:

- (a) První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n . Determinant matice je tudíž roven $n!$.
- (b) Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostáváme matici

$$B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce. Dostaneme

$$B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + \sum_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}.$$

Determinant je roven $(a_1 + \dots + a_n + x)x^{n-1}$.

Př. 3. Určete $\det(A)$ a rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5 - a & -1 & -2 \\ 2 + 3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Využijeme Kritérium regularity, které říká, že A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Spočteme determinant:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5 - a & -1 & -2 \\ 2 + 3a & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2a \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 5 - a & -2 \\ 2 + 3a & 4 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 5 - a & -1 \\ 2 + 3a & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2a(-4 + 4) - 3((5 - a)4 - (-2)(2 + 3a)) - ((5 - a)2 - (-1)(2 + 3a)) \\ &= -7a - 84. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že A je singulární právě tehdy, když $a = -\frac{84}{7} = -12$.

Př. 4. Určete adjungovanou matici $\text{adj}(A)$ a najděte inverzní matici A^{-1} (pokud existuje) k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) nad tělesem reálných čísel,
- (b) nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Řešení:

Adjungovaná matice má složky: $(\text{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j -tého řádku a i -tého sloupce z matice A (Pozor, všimněte si prohození indexů!).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$.

Nad $\mathbb{R}$ počítáme adjungovanou matici následovně. Nejprve spočteme determinanty podmatic:

$$\det(A^{1,1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(A^{2,1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det(A^{3,1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det(A^{1,2}) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\det(A^{2,2}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(A^{3,2}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\det(A^{1,3}) = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\det(A^{2,3}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(A^{3,3}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dostáváme adjungovanou matici:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & (-1) \cdot (-1) & -1 \\ (-1) \cdot (-2) & 1 & (-1) \cdot 2 \\ -2 & (-1) \cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme determinant matice A . Využijte rozvoje podle řádků a determinantů již spočtených výše. Dostáváme

$$\det(A) = 1 \cdot \det(A^{1,1}) + 0 \cdot \det(A^{1,2}) + 1 \cdot \det(A^{1,3}) = 1 - 2 = -1$$

Konečně adjungovanou matici vynásobíme $\frac{1}{\det(A)} = -1$ a získáme inverzní matici:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obdobně můžeme počítat nad $\mathbb{Z}_5$, pouze všechny kroky provádíme modulo 5.

$$|A| = -1 = 4, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$