

Determinanty – Aplikace

Př. 1. Řešte pomocí Cramerova pravidla soustavu lineárních rovnic $Ax = b$ pro matici

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array} \right).$$

Řešení:

Nejprve pomocí Gaussovy eliminace spočteme determinant A .

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-7) = -7. \end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice.

1) Dopočítáme první složku výsledného vektoru (nahrazujeme první sloupec):

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+2} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Rozvoj dle 2. sloupce}) \\ &= (-1)(-6 \cdot 3 - (-2) \cdot 10) + (7 \cdot 3 - 3 \cdot 10) + (7 \cdot (-2) - 3 \cdot (-6)) \\ &= -(-18 + 20) + (21 - 30) + (-14 + 18) = -2 - 9 + 4 = -7 \end{aligned}$$

Dostáváme $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$.

2) Dopočítáme druhou složku výsledného vektoru (nahrazujeme druhý sloupec):

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} &= \det - \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det - \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \det \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 40 & 15 \end{pmatrix} = \det \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

3) Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14.\end{aligned}$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Závěr: Řešením soustavy je vektor $x = (1, -1, 2)^T$.

Př. 2. Absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje objem těles. Zároveň lze na determinant nahlížet jako na objem rovnoběžnostěnu daného sloupce matice.

Určete determinanty a ověřte tuto geometrickou interpretaci pro následující matice:

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Řešení:

(a) V tomto případě lineární zobrazení zobrazí každou plochu na sebe samu. Tedy plochy se nemění a očekáváme, že determinant bude 1.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

(b) Toto lineární zobrazení vezme čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na obdélník jehož strany jsou $(2, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 2). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 2-krát a očekáváme, že $\det(B) = 2$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(B) = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2.$$

(c) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na čtverec jehož strany jsou $(2, 0)^T$ a $(0, 2)^T$ (obsah je 4). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 4-krát a očekáváme, že $\det(C) = 4$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(C) = C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4.$$

(d) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na rovnoběžník jehož strany jsou $(1, 0)^T$ a $(2, 1)^T$. Obsah rovnoběžníku je stále 1 (představte si, že vznikl tak, že vezmete stěnu vystavěnou z kostek a poté se opřete o její levou stranu, posunete jednotlivé kostky vůči sobě a stěnu zkosíte, ale obsah zůstane zachován). Tedy zobrazení zachovává plochy a očekáváme, že $\det(D) = 1$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(D) = D_{1,1}D_{2,2} - D_{1,2}D_{2,1} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

- (e) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na úsečku danou vektorem $(1, 0)^T$. Vzhledem k tomu, že jsme zobrazili na vlastní podprostor $\mathbb{R}^2$ je obsah roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(E) = E_{1,1}E_{2,2} - E_{1,2}E_{2,1} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

- (f) Pro matice velikosti 3×3 platí podobná geometrická intuice, pouze místo obsahu udává determinant objem. Zdůrazníme poslední případ (lineární zobrazení na podprostor) i pro matice 3×3 .

Toto lineární zobrazení vezme krychli danou vektory $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ a $(0, 0, 1)^T$ (objem krychle je 1) a zobrazí ji na čtverec daný vektory $(1, 0, 0)^T$ a $(0, 1, 0)^T$. Vzhledem k tomu, že obraz zobrazení je podprostor $\mathbb{R}^3$, získáváme 2D útvar a jeho objem je tedy roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\begin{aligned} \det(F) &= F_{1,1}F_{2,2}F_{3,3} + F_{1,2}F_{2,3}F_{3,1} + F_{1,3}F_{2,1}F_{3,2} \\ &\quad - F_{1,1}F_{2,3}F_{3,2} - F_{1,2}F_{2,1}F_{3,3} - F_{1,3}F_{2,2}F_{3,1} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Př. 3.** Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $(3, 1, 1)^T$, $(2, 1, 1)^T$ a $(2, 3, 2)^T$.

Řešení:

Viz <http://matematika.reseneulohy.cz/2585/objem-rovnobeznostenu>.

- Př. 4.** Určete objem elipsoidu, který je obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení s předpisem

$$\begin{aligned} f(1, 3, 1) &= (3, 1, 0), \\ f(1, 0, 3) &= (1, 0, 2), \\ f(1, 1, 1) &= (4, 1, 5). \end{aligned}$$

Řešení:

Viz <http://matematika.reseneulohy.cz/2586/objem-elipsoidu>.

- Př. 5.** Jak lze pomocí determinantu popsat přímku v rovině procházející body (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ? Najděte obecnou rovnici přímky procházející body $(0, 1)$ a $(-2, 3)$.

Řešení:

Body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) leží na společné přímce $ax + by + c = 0$, pokud soustava rovnic

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ ax_1 + by_1 + c &= 0, \\ ax_2 + by_2 + c &= 0. \end{aligned}$$

má netriviální řešení $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. To nastane právě tehdy, když je matice soustavy singulární, t.j. má nulový determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

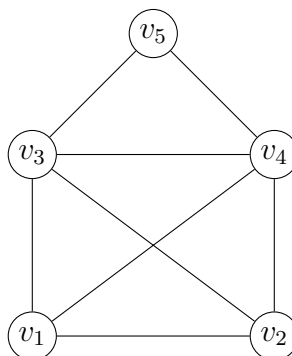
Tento vztah dává popis přímky v rovině pomocí determinantu.

Konkrétně, pro body $(0, 1)$ a $(-2, 3)$ dostaneme determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 1 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot x - 1 \cdot y \cdot 0 = -2x - 2y + 2,$$

obecná rovnice hledané přímky je tedy $-2x - 2y + 2 = 0$ (ekvivalentně také $x + y - 1 = 0$).

Př. 6. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Řešení:

Viz <http://matematika.reseneulohy.cz/2587/pocet-koster>.