

Polynomy, Vlastní čísla a vlastní vektory

Př. 1. Určete součet, rozdíl, součin a podíl následujících polynomů:

a) $p(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $q(x) = 3x^2 - x + 5$ nad $\mathbb{R}$,

b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 2$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Př. 2. Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte kvadratický polynom body

a) $(-1, -9)$, $(1, -3)$ a $(2, 3)$,

b) $(-1, 10)$, $(1, 4)$ a $(4, 25)$.

Př. 3. Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 4. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Př. 5. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Př. 6. Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Př. 7. Buď A matice, která má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(c) matice $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.