

Diagonalizovatelnost

Př. 1. Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

- (a) Aby vše fungovalo, musí být matice S regulární, tedy matice A_1 musí mít n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Spočtěme tedy vlastní čísla matice A_1 . Charakteristický polynom matice A_1 je

$$p_{A_1}(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Vlastní čísla se tedy rovnají $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Příslušné vlastní vektory získáme vyřešením homogenní soustavy rovnic $(A_1 - \lambda I) = 0$, kde za λ dosadíme postupně konkrétní vlastní čísla. Vyjdou tedy vektory $x_1 = c \cdot (1, 0, 2)^T$, $x_2 = c \cdot (1, 1, 1)^T$ a $x_3 = c \cdot (0, 0, 1)^T$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Matice A_1 je tedy diagonalizovatelná a můžeme ji napsat ve tvaru SDS^{-1} , kde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Postupujeme stejně jako u matice A_1 jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice A_2 se rovná $p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu p_{A_2} jsou $1 + i$ a $1 - i$ a k nim příslušné vlastní vektory $(1, 1 + i)^T$ a $(1, 1 - i)^T$. Matici A_2 tedy můžeme napsat ve tvaru SDS^{-1} pro matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i & 1 - i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Př. 2. Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice B má vlastní číslo 0 s algebraickou násobností 2. Pokud by tedy byla diagonalizovatelná, pak by musela být podobná nulové matici. Tedy pro nějakou regulární matici S ,

$$B = S0S^{-1} = 0.$$

Př. 3. Necht' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou diagonalizovatelné matice. Jsou matice αA (pro $\alpha \in \mathbb{R}$), $A + B$ a $A \cdot B$ také diagonalizovatelné?

Řešení:

- (a) Matice αA má stejné vlastní vektory jako matice A , je tedy také diagonalizovatelná.
- (b) Matice $A + B$ nemusí být diagonalizovatelná. Např. matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ jsou diagonalizovatelné, ale jejich součet $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ není.
- (c) Matice $A \cdot B$ nemusí být diagonalizovatelná. Např. matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ jsou diagonalizovatelné, ale jejich součin $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ není.

Př. 4. Pro diagonalizovatelnou matici C , kde

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix},$$

spočítejte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

Řešení:

Mějme $C = SDS^{-1}$ pro diagonální matici D . Všimněme si, že

$$C^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}.$$

Obdobně $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} \cdot SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = SDS^{-1}$, kde $D^{\frac{1}{2}}$ je diagonální matice, kde jsou na diagonále odmocniny diagonálních prvků matice D , tedy $D_{i,i}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{D_{i,i}}$.

Třetí mocninu matice C tedy spočteme jako SD^3S^{-1} a odmocninu jako $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1}$.

Nejprve musíme zkonstruovat rozklad matice do tvaru SDS^{-1} :

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = SDS^{-1}.$$

Nyní již můžeme spočítat třetí mocninu a druhou odmocninu

$$SD^3S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix} = C^3,$$

$$SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = C^{\frac{1}{2}}.$$

Př. 5. Necht' $A = SAS^{-1}$ je diagonalizační rozklad matice A . Určete vlastní vektory matice A^T .

Řešení:

Pro matici A^T platí vztah

$$A^T = (SAS^{-1})^T = (S^{-1})^T \Lambda S^T,$$

dostaneme tedy diagonalizační rozklad $A^T = R\Lambda R^{-1}$ pro $R = (S^{-1})^T$. Vlastními vektory A^T jsou sloupce matice R , tedy řádky matice S^{-1} .