

Vlastní čísla, Jordanova normální forma

Př. 1. Ukažte, že rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální (t.j. $Q^{-1} = Q^T$), existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení:

Mějme matici A , pro kterou rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ existuje. Chceme dokázat, že taková matice A nutně musí být symetrická, tedy že platí $A^T = A$. Z uvažovaného rozkladu a z vlastností transpozice dostaneme

$$A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = (Q^T)^T \Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A.$$

Př. 2. Najděte všechny možné Jordanovy normální formy pro matici s charakteristickým polynomem $(\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$.

Řešení:

Kořeny charakteristického polynomu, a tedy i vlastními čísly příslušné matice, jsou hodnoty $\lambda = 1$ (s algebraickou násobností 3) a $\lambda = -2$ (s násobností 1). Také vidíme, že stupeň charakteristického polynomu je 4, uvažujeme tedy matici a Jordanovu normální formu řádu 4.

Pro vlastní číslo -2 existuje pouze jeden vlastní vektor (až na násobek), kterému odpovídá jedna Jordanova buňka $J_1(-2)$. Pro vlastní číslo 1 můžou existovat až 3 lineárně nezávislé vlastní vektory. V případě 1 vlastního vektoru dostaneme jednu buňku $J_3(1)$, pro dva vlastní vektory máme dvě Jordanovy buňky, které nutně musí být $J_2(1)$, $J_1(1)$ a pro tři vlastní vektory máme tři buňky $J_1(1)$.

Pro matici s daným charakteristickým polynomem tedy existují tři možné Jordanovy normální formy (až na pořadí buněk):

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 3. Matici B převed'te do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Ne všechny matice jsou diagonalizovatelné, například matice B . Všechny matice jsou ale podobné matici v Jordanově normálním tvaru. Ten si nyní pro matici B spočteme.

Hledáme tedy regulární matici S a matici v Jordanově normálním tvaru J takové, že $B = SJS^{-1}$. Začneme stejně, jako kdybychom chtěli ověřit, zda je matice diagonalizovatelná, tedy spočteme vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický polynom vypadá:

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Jádrem matice $(B - 2I)$ má dimenzi 1, konkrétně $\text{Ker}(B - 2I) = \text{span}\{(1, 0, 1)^T\}$. Vlastní číslo $\lambda = 2$ má algebraickou násobnost 2 (je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu), ale jeho geometrická násobnost je rovna 1 (přísluší mu pouze jeden vlastní vektor). Matice B tudíž nemá 3 lineárně nezávislé vlastní vektory.

Přistoupíme tedy k výpočtu zobecněných vlastních vektorů pro vlastní číslo λ_1 . Spočteme $\text{Ker}((B - 2I)^2) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$. Nyní zvolíme zobecněný vlastní vektor x_2 z $\text{Ker}((B - 2I)^2) \setminus \text{Ker}(B - 2I)$, například $x_2 = (0, 0, 1)^T$. Dopačteme vlastní vektor x_1 ,

$$x_1 = (B - 2I)x_2 = (1, 0, 1)^T.$$

Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $\text{span}\{(2, -1, 1)^T\}$. Získáváme hledanou matici S .

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Také vypočteme její inverzi S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice B lze nyní zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = S J S^{-1}.$$

Př. 4. Spočítejte druhou, třetí a 11. mocninu matice B z předchozího příkladu.

Řešení:

Využijeme Jordanova normálního tvaru spočteného v předchozím příkladě. Dostáváme $B^2 = (S J S^{-1})(S J S^{-1}) = S J^2 S^{-1}$. Obdobně $B^3 = S J^3 S^{-1}$. Chceme tedy spočítat druhou a třetí mocninu matice J .

Spočteme J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom druhá mocnina B je rovna:

$$B^2 = S J^2 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obdobně spočteme J^3 :

$$J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A třetí mocnina B je rovna:

$$B^3 = S J^3 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že i mocnění matice v Jordanově normálním tvaru je jednodušší než pro obecné matice. Při mocnění nedochází ke změně mimo jednotlivé Jordanovy buňky (neboli nuly mimo Jordanovy buňky zůstávají zachovány).

Nakonec stejným způsobem spočteme 11. mocninu.

$$J^{11} = \begin{pmatrix} 2^{11} & 11 \cdot 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud 11. mocnina B je rovna:

$$\begin{aligned} B^{11} = S J^{11} S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9216 & -7170 & 11264 \\ 0 & 1 & 0 \\ -11264 & -9217 & 13312 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Př. 5. Určete Gerschgorinovy disky pro matici

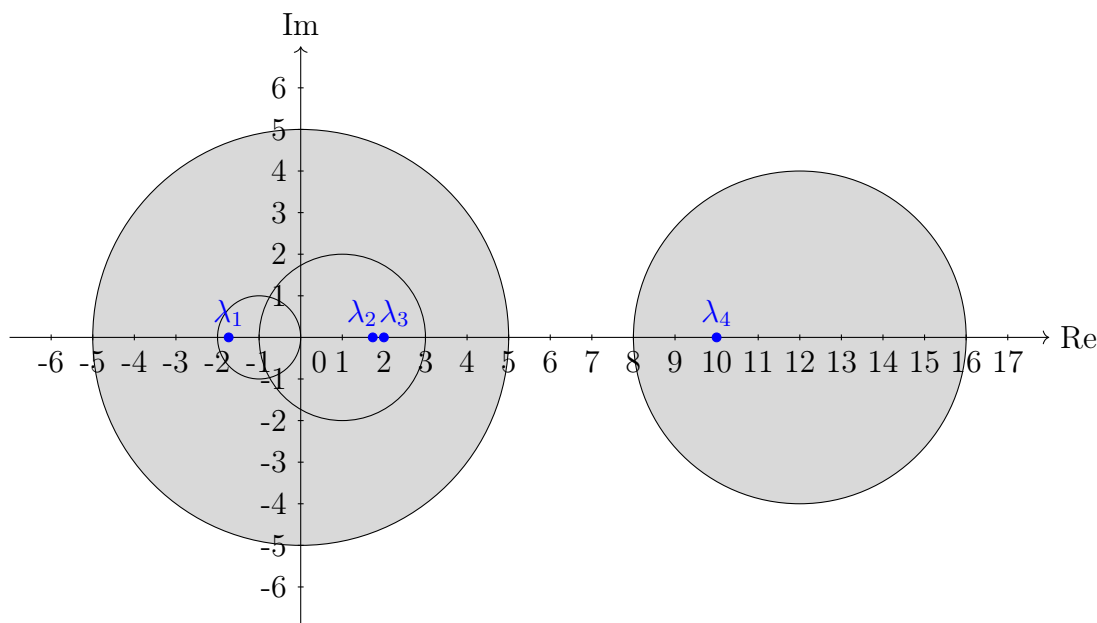
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, 4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

$$\begin{array}{ll} c_1 = a_{11} = 1, & r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2, \\ c_2 = a_{22} = 12, & r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4, \\ c_3 = a_{33} = -1, & r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1, \\ c_4 = a_{44} = 0, & r_4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5. \end{array}$$



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4 .

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12, 4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\bar{\lambda}_4$). V kruhu $B(0, 5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

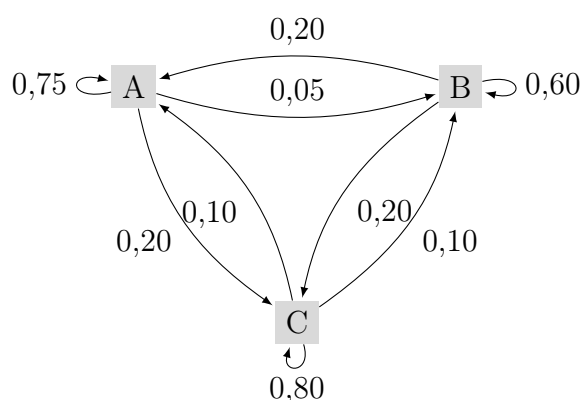
Př. 6. Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C).

Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B.

Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:

Pravidla pro volby v Matfyzákově ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P , kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i :

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,60 & 0,10 \\ 0,20 & 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu A do stavu A (75 % voličů opět volí stranu Anarchistů), do stavu B (5 % bude volit stranu Bláhových) a do stavu C (20 % volí Cílevědomé).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \dots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S_{1*}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru 2 : 1 : 3.

Jelikož je matice P kladná, výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \text{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$.