

Skalární součin a norma

Př. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

- (a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
- (b) $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

- (a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y \rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x \rangle,$$

- (b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = -1$, což není kladná hodnota.
- (c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = 0$ což není kladná hodnota.
- (d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2 \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{a zároveň} \quad x_2 = 0.$$

To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2, \\ \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2) \\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2), \end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2, \\ \alpha \langle x, y \rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2). \end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \\ \langle y, x \rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2. \end{aligned}$$

Př. 2. Necht' je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + 2x_3 \overline{y_3} + x_3 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3}.$$

Určete u následujících vektorů $x, y \in \mathbb{C}^3$ skalární součin $\langle x, y \rangle$, euklidovskou normu $\|x\|$, vzdálenost vektorů $\|x - y\|$ a zda jsou navzájem kolmé:

(a) $x = (4, 2, 3)^T, y = (1, 5, -2)^T,$

(b) $x = (2 + i, 0, 4 - 5i)^T, y = (1 + i, 2 + i, -1)^T.$

Řešení:

Viz <http://matematika.reseneulohy.cz/2676/standardni-skalar-ni-soucin>.

Př. 3. (a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y \rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T, y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Př. 4. Dokažte, že pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

Řešení:

Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin je tvaru

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i|^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y . Konkrétně zvolíme

$$x = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})^T, \quad y = (1/\sqrt{a_1}, \dots, 1/\sqrt{a_n})^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$|\sum_{i=1}^n 1|^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Př. 5. Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Ukažte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- (b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- (c) Dokažte $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Řešení:

- (a) Pišme

$$\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A^T)_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ji} B_{ji}.$$

Čili výraz $\text{trace}(A^T B)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

- (b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B \rangle|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ dostane podobu

$$\text{trace}(A^T B)^2 \leq \text{trace}(A^T A) \text{trace}(B^T B).$$

- (c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A := I_n$, $B := A$ a tím pádem dostaneme

$$\text{trace}(A)^2 \leq \text{trace}(I_n) \cdot \text{trace}(A^T A) = n \cdot \text{trace}(A^T A).$$

Př. 6. Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.
- (b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

Řešení:

- (a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce a sebe navzájem kolmé nejsou.
- (b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.