

Skalární součin a norma

Př. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

- (a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
- (b) $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Př. 2. Necht' je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem

$$\langle x, y \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}.$$

Určete u následujících vektorů $x, y \in \mathbb{C}^3$ skalární součin $\langle x, y \rangle$, euklidovskou normu $\|x\|$, vzdálenost vektorů $\|x - y\|$ a zda jsou navzájem kolmé:

- (a) $x = (4, 2, 3)^T$, $y = (1, 5, -2)^T$,
- (b) $x = (2 + i, 0, 4 - 5i)^T$, $y = (1 + i, 2 + i, -1)^T$.

Př. 3. (a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Př. 4. Dokažte, že pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

Př. 5. Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Ukažte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- (b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- (c) Dokažte $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Př. 6. Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.
- (b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.