

Ortonormální báze a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Př. 1. Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \quad (0, 0, 1).$$

Řešení:

Standardně bychom mohli určit koeficienty lineární kombinace pomocí řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit speciálním způsobem jako $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ (tzv. *Fourierovy* koeficienty).

Tedy dostáváme $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, kde u_1, u_2, u_3 je zadaná ortonormální báze a

- $\alpha_1 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}},$
- $\alpha_2 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$
- $\alpha_3 = \langle (3, 2, 1)^T, (0, 0, 1)^T \rangle = 1.$

Př. 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Základní myšlenka postupu je: Odečtením projekce x_i do $\text{span}\{z_1, \dots, z_{i-1}\}$ od x_i spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j$ a ten pak normalizujeme na $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- Normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (4, 1, 4, 1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.
- Normalizujeme y_2 : $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.
- Normalizujeme y_3 : $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Př. 3. Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení:

Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru matice A na bázi $\mathbb{R}^4$. Matici převedeme do odstupňovaného tvaru a poté bázi Z rozšíříme např. o vektory z kanonické báze odpovídající všem nebázickým sloupcům. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, a tak lze vzít např. $x_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ abychom dostali rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Na vektory z_1, z_2, z_3, x_4 nyní aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci a získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Jelikož jsme rozšířili ortonormální bázi

$$Z = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right\}$$

řádkového prostoru A , stačí upravit pouze vektor x_4 :

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž $y_4 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$,
- Normalizujeme y_4 : $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$.

Př. 4. Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- dostane na vstup lineárně závislé vektory?
- dostane na vstup ortogonální vektory?
- dostane na vstup ortonormální vektory?
- dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i ? Jak se změní výstup?

Řešení:

- Mějme na vstupu $x_1, \dots, x_n$ a necht' $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na vektorech $x_1, \dots, x_{j-1}$. Buď navíc j nejmenší takové, že tato situace nastane. Lineární závislost znamená, že projekce vektoru x_j do podprostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ je vektor x_j sám. Při Gramově–Schmidtově ortogonalizaci postupně od vektoru odčítáme jeho kolmou projekce do podprostoru tvořeného vektory $x_1, \dots, x_{j-1}$. Tedy ortogonalizace poběží standardně až do chvíle, než se začne ortogonalizovat vektor x_j (proto jsme vzali j nejmenší). Při ortogonalizaci x_j dojde k tomu, že se tento vektor vynuluje.

V okamžiku, kdy budeme chtít tento nulový vektor znormovat (tj. vydělit jeho normou) se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.

- Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.
- V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme tytéž vektory, co na vstupu.

- (d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ až do okamžiku, než přejdeme k ortogonalizaci i -tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i -tého vektoru do podprostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i výsledek po odečtení $y_i = x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p) = -y_i$ bude mít pro tyto případy odlišné znaménko. Normování tento vztah vektorů zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, a ta není určena znaménkem bázeckého vektoru.

Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i -tého vektoru.

Př. 5. Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte

$$x_1 = (i, i, i)^T, \quad x_2 = (0, i, i)^T, \quad x_3 = (0, 0, i)^T.$$

Řešení:

Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst 2. vektor od 1. a 3. vektor od 2. Dostali bychom vektory $(i, 0, 0)^T$, $(0, i, 0)^T$, $(0, 0, i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň jejich normy jsou rovny 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i, i, i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle} = \sqrt{x_1^T x_1} = \sqrt{3(i \cdot (-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0, i, i)^T - \langle x_2, z_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i)^T = (0, i, i)^T - \frac{-2i^2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0, i, i)^T \\ &= (0, i, i)^T - \frac{2}{3}(i, i, i)^T = \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \frac{1}{\|y_2\|} \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i, i, i).$$

Nakonec

$$y_3 = (0, 0, i)^T - \frac{1}{3}(i, i, i)^T - \frac{1}{6}(-2i, i, i)^T = \frac{1}{2}(0, -i, i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i)^T$.

Řešením je $Z = \{z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i)^T, z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i, i, i)^T, z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i)^T\}$.

Př. 6. Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:

Množina řešení soustavy má tvar $\{(a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T$. Po znormování prvního vektoru dostaneme

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T.$$

Po odečtení projekce od vektoru $(1, 1, 0)^T$ dostaneme:

$$\begin{aligned} y_2 &= (1, 1, 0)^T - \left\langle (1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 1)^T \\ &= (1, 1, 0)^T - \frac{1}{2}(0, 1, 1)^T = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T. \end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $y_2 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$. Ten má normu $\sqrt{3/2}$. Tedy druhý vektor ortonormální báze je

$$z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T.$$

Poznamenejme, že řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Př. 7. Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8, -1, 1, -2]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Řešení:

Můžeme postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory odpovídající bodům B, C a A , tj. na vektory $x_1 = (8, -1, 1, -2)^T$, $x_2 = (4, -2, 2, -1)^T$ a $x_3 = (5, 5, 3, 3)^T$. Hledaná vzdálenost je rovna právě normě vektoru y_3 z třetího kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, který získáme odečtením projekce x_3 do $\text{span}\{x_1, x_2\}$ od x_3 (geometrická představa viz strana 177 ve skriptech M. Hladíka – „nakolmení 3. vektoru“).

Zde se vyplatí malý předvýpočet. Vektory x_1, x_2 jsou lineárně nezávislé a navíc

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde řádky x'_1 a x'_2 poslední matice jsou vzájemně kolmé a generují stejnou rovinu jako vektory x_1 a x_2 .

Nyní můžeme spočítat projekci vektoru $x_3 = (5, 5, 3, 3)^T$ do roviny generované vektory x'_1 a x'_2 :

$$p = \frac{\langle x_3, x'_1 \rangle}{\|x'_1\|^2} x'_1 + \frac{\langle x_3, x'_2 \rangle}{\|x'_2\|^2} x'_2 = \frac{17}{17} (4, 0, 0, -1)^T + \frac{2}{2} (0, 1, -1, 0)^T = (4, 1, -1, -1)^T.$$

(Protože x'_1 a x'_2 nemají jednotkovou normu, musíme při hledání projekce pracovat s ortonormálními vektory $\frac{x'_1}{\|x'_1\|}$ a $\frac{x'_2}{\|x'_2\|}$. Proto se ve výrazu pro p objevuje ve jmenovateli $\|x'_1\|^2$ resp. $\|x'_2\|^2$.)

V třetím kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace dostáváme

$$y_3 = x_3 - p = (5, 5, 3, 3)^T - (4, 1, -1, -1)^T = (1, 4, 4, 4).$$

Vzdálenost bodu A od roviny obsahující B a C je

$$\|x_3 - p\| = \|y_3\| = \sqrt{1 + 16 + 16 + 16} = 7.$$