

Ortonormální báze a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Př. 1. Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \quad (0, 0, 1).$$

Př. 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Př. 3. Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Př. 4. Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- (a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?
- (b) dostane na vstup ortogonální vektory?
- (c) dostane na vstup ortonormální vektory?
- (d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i ? Jak se změní výstup?

Př. 5. Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte

$$x_1 = (i, i, i)^T, \quad x_2 = (0, i, i)^T, \quad x_3 = (0, 0, i)^T.$$

Př. 6. Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Př. 7. Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8, -1, 1, -2]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Ortonormální báze a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Př. 1. Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \quad (0, 0, 1).$$

Př. 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Př. 3. Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Př. 4. Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- (a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?
- (b) dostane na vstup ortogonální vektory?
- (c) dostane na vstup ortonormální vektory?
- (d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i ? Jak se změní výstup?

Př. 5. Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte

$$x_1 = (i, i, i)^T, \quad x_2 = (0, i, i)^T, \quad x_3 = (0, 0, i)^T.$$

Př. 6. Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Př. 7. Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8, -1, 1, -2]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.