

Ortogonalní doplněk a metoda nejmenších čtverců

Př. 1. Pro podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete $V^\perp, \{0\}^\perp, \{\}^\perp$.

Řešení:

Ortogonalní doplněk množiny V je definovaný $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall y \in V : \langle x, y \rangle = 0\}$. Proto $\{0\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, 0 \rangle = 0\} = \mathbb{R}^4$. Nakonec $\{\}^\perp = \mathbb{R}^4$, protože na vektory $x \in \mathbb{R}^4$ neklademe žádnou podmínku (neexistuje vektor $v \in \{\}$, na který by musel být x kolmý).

Př. 2. Najděte podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení:

Takový podprostor nemůže existovat, neboť platí, že $\dim U^\perp = n - \dim U$. Pro $n = 5$ liché vidíme, že $\dim U$ a $\dim U^\perp$ musejí mít rozdílnou paritu a tedy i rozdílnou hodnotu.

Př. 3. Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonalní doplněk prostorů

$$V_1 = \text{span}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}, \quad V_2 = \text{span}\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}.$$

Řešení:

Platí $R(A)^\perp = \text{Ker}(A)$. Generátory prostoru V_1 tvoří řádkový prostor matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, stačí tedy nalézt bázi $\text{Ker}(A)$, kterou tvoří např. vektor $(1, 1, -1)$.

Prostor V_2 je jádrem matice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, bázi doplněku $V_2^\perp$ tvoří tedy např. vektor $(3, -5, 1)$.

Př. 4. Spočítejte ortogonalní doplněk množiny obsahující vektor $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do prostoru

$$V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}.$$

Řešení:

Nejprve je dobré si uvědomit, že vektor u skutečně náleží do prostoru V , jinak by zadání nedávalo smysl.

Ortogonalní doplněk k vektoru u do prostoru V pak tvoří přímka kolmá k u a ležící ve V . Cílem je tedy najít její směrnici z , to bude báze hledaného ortogonalního doplněku.

Protože $V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{u, v\}$, stačí zortogonalizovat vektory u, v například Gramovou–Schmidtovou metodou. Dostaneme na výstup vektory

$$\frac{1}{\|u\|}u = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 0, 0, -2)^T, \quad \frac{\sqrt{130}}{130}(2, 5, 10, 1)^T.$$

Řešením je tedy vektor $z = (2, 5, 10, 1)^T$, nebo jakýkoli jeho nenulový násobek, ale jiné řešení už neexistuje.

Pro zkoušku může čtenář ověřit, že skutečně platí $z \perp u$ a $V = \text{span}\{u, z\}$.

Př. 5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Řešení:

Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A . Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i,$$

tedy $b_{\mathcal{S}(A)} = (4, 8, 13, 9)^T$ s koeficienty $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je $\|Ax' - b\| = \sqrt{45}$.

Ano, výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$.

Př. 6. Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Řešení:

Po zlogaritmování soustavy dostaneme standardní úlohu nejmenších čtverců. Soustava normálních rovnic má tvar $A^T A = A^T b$, kde

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 16 \\ \ln 27 \\ \ln 45 \\ \ln 74 \\ \ln 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 861412331516175761716224000 \approx 62.02062 \\ \ln 175504320 \approx 18,9832 \end{pmatrix}$$

Řešení: $d \approx 0,507$, $\ln c \approx 2,2753$, $c \approx 9,731$.

Př. 7. Je zobrazení $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí

$$[f_\alpha]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

izometrií? Jakou transformaci zobrazení f_α představuje?

Řešení:

Zobrazení představuje otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček, zachovává tedy normu vektorů i skalární součin (tudíž jde o izometrii).

Můžeme ověřit, že matice zobrazení vzhledem ke kanonické bázi je ortogonální:

$$\begin{aligned} {}_{\text{kan}}[f_\alpha]_{\text{kan}} \cdot ({}_{\text{kan}}[f_\alpha]_{\text{kan}})^T &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Př. 8. Nechtě $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

- (a) Matice $A \cdot B$ je ortogonální.
- (b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Řešení:

- (a) Platí, jelikož $(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = A(I_n)A^T = AA^T = I_n$.
- (b) Neplatí, např. pro $A = B = I_n$ dostaneme matici $A + B = 2I_n$, která není ortogonální.