

Ortogonální doplněk a metoda nejmenších čtverců

Př. 1. Pro podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\cdot\}^\perp$.

Př. 2. Najděte podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Př. 3. Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonální doplněk prostorů

$$V_1 = \text{span}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}, \quad V_2 = \text{span}\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}.$$

Př. 4. Spočítejte ortogonální doplněk množiny obsahující vektor $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do prostoru

$$V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}.$$

Př. 5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Př. 6. Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Př. 7. Je zobrazení $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí

$${}_{\text{kan}}[f_\alpha]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

izometrií? Jakou transformaci zobrazení f_α představuje?

Př. 8. Necht' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

(a) Matice $A \cdot B$ je ortogonální.

(b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Ortogonální doplněk a metoda nejmenších čtverců

Př. 1. Pro podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\cdot\}^\perp$.

Př. 2. Najděte podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Př. 3. Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonální doplněk prostorů

$$V_1 = \text{span}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}, \quad V_2 = \text{span}\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}.$$

Př. 4. Spočítejte ortogonální doplněk množiny obsahující vektor $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do prostoru

$$V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}.$$

Př. 5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Př. 6. Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Př. 7. Je zobrazení $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí

$${}_{\text{kan}}[f_\alpha]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

izometrií? Jakou transformaci zobrazení f_α představuje?

Př. 8. Necht' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

(a) Matice $A \cdot B$ je ortogonální.

(b) Matice $A + B$ je ortogonální.