

Determinanty

Domácí úkol 1. Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Pro každou matici využijte jiný způsob výpočtu: přímo z definice, pomocí Gaussovy eliminace nebo pomocí Laplaceova rozvoje.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \text{ pro } a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}. \quad [5 \text{ b}]$$

Domácí úkol 2. Určete determinant následující matice $n \times n$ pro $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}. \quad [3 \text{ b}]$$

Domácí úkol 3. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti determinantu (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

$$\text{a) } \det(AB) = \det(BA) \text{ pro } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad [1 \text{ b}]$$

$$\text{b) } \det(AB) = \det(BA) \text{ pro } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad [2 \text{ b}]$$

$$\text{c) } \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(A) \text{ pro } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad [2 \text{ b}]$$

$$\text{d) } \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B) \text{ pro } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad [2 \text{ b}]$$

Domácí úkol 4. Určete adjungovanou matici $\text{adj}(A)$ a pomocí ní najděte inverzní matici A^{-1} k matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad [2 \text{ b}]$$

Domácí úkol 5. Vyřešte Cramerovým pravidlem následující soustavu rovnic nad $\mathbb{Z}_5$:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2.$$

[3 b]