

Vlastní čísla a diagonalizace

Domácí úkol 1. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad [6 \text{ b}]$$

Domácí úkol 2. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

a) Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že matice $A + \beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

b) Kdy je matice $A + \beta I_n$ regulární pro každé $\beta \in \mathbb{R}$? [3 b]

Domácí úkol 3. Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a s jejich pomocí rozhodněte, zda má matice A aspoň jedno reálné záporné vlastní číslo. [2 b]

Domácí úkol 4. Rozhodněte, zda platí následující implikace (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

a) $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$,

b) $A^2 \sim B^2 \Rightarrow A \sim B$,

kde relace $\sim$ značí podobnost matic. [3 b]

Domácí úkol 5. Vyjádřete matici A ve tvaru SDS^{-1} , kde matice D je diagonální a matice S regulární, a využijte tento rozklad pro výpočet matice A^3 , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}. \quad [3 \text{ b}]$$

Domácí úkol 6. Najděte Jordanovu normální formu (pouze matici J z rozkladu $A = SJS^{-1}$) pro

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Můžete využít toho, že charakteristický polynom matice A je $p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$. [3 b]