

Skalární součin a ortogonalita

Domácí úkol 1. Ověřte, že předpis

$$\langle x, y \rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

definuje skalární součin na $\mathbb{R}^2$.

Spočítejte vzhledem k tomuto skalárnímu součinu pro vektory $u = (1, 2)$ a $v = (2, 5)$:

a) $\langle u, v \rangle$ a rozhodněte, zda platí $u \perp v$,

b) $\|u\|$, $\|v\|$. [5 b]

Domácí úkol 2. Najděte všechny vektory, které jsou kolmé na všechny řádky matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \quad [2 \text{ b}]$$

Domácí úkol 3. Určete souřadnice vektoru $(3, 5, 2)$ vzhledem k ortonormální bázi

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}. \quad [2 \text{ b}]$$

Domácí úkol 4. Pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizační metody ortonormalizujte vektory

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1, 0)$$

vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \quad [4 \text{ b}]$$

Domácí úkol 5. Buď V vektorový prostor. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti ortogonálního doplňku:

a) $M \subseteq N \Rightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$,

b) $N^\perp \subseteq M^\perp \Rightarrow M \subseteq N$,

c) $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$. [4 b]

Domácí úkol 6. Ověřte, že soustava lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

nemá řešení. Určete přibližné řešení soustavy metodou nejmenších čtverců.

[3 b]