

Positivně (semi-)definitní matice

Domácí úkol 1. Pro každou z následujících matic určete minimálně 2 různými způsoby, zda je pozitivně semidefinitní nebo pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4 b]

Domácí úkol 2. Rozhodněte, zda je následující matice řádu n pozitivně definitní:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[3 b]

Domácí úkol 3. Určete všechny matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že matice A a $-A$ jsou pozitivně semidefinitní.

[2 b]

Domácí úkol 4.

- a) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Dokažte, že matice $S^T A S$ je pozitivně definitní. [2 b]
- b) Buď $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně semidefinitní a $B_{ii} = 0$ pro jisté i . Ukažte, že i -tý řádek a i -tý sloupec matice B jsou nulové. [2 b]

Domácí úkol 5. Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$ pro vektor $b = (8, -10, 30)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 26 \end{pmatrix}$$

[4 b]

Domácí úkol 6. Najděte příklady matic ilustrující, že nefunguje přímé zobecnění podmínek pro testování pozitivní semidefinitnosti pomocí

- a) Gaussovy eliminace (převod na odstupňovaný tvar s nezápornou diagonálou),
- b) Sylvestrova kritéria pro pozitivní definitnost (nezáporné determinanty hlavních vedoucích podmatic). [3 b]