

Bilineární a kvadratické formy

Př. 1. Zdůvodněte, proč jsou následující formy bilineární a nalezněte jejich maticovou reprezentaci:

(a) násobení reálných čísel, [1 b]

(b) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou $a(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$, [2 b]

(c) $b: \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}$ danou $b(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n jy_j\right)$ [3 b]

Př. 2. Uvažujte kvadratickou formu $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$c(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2.$$

Určete její maticovou reprezentaci:

(a) vůči kanonické bázi, [2 b]

(b) vůči bázi $B = \{(1, 2)^T, (1, 1)^T\}$. [2 b]

Př. 3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ mějte kvadratickou formu

$$g(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 4xz + y^2 + 2z^2.$$

Najděte polární bázi formy g a určete její signaturu. [5 b]

Př. 4. Rozhodněte, zda existuje báze $\mathbb{R}^3$ taková, že matice formy g (z předchozí úlohy) vůči této bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad [2 b]$$

Př. 5. Nechť f je bilineární forma a dále A její maticová reprezentace vůči nějaké bázi B . Dokažte, nebo vyvráťte, že vlastní čísla matice A jsou nezávislá na volbě báze B . [3 b]