

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\text{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

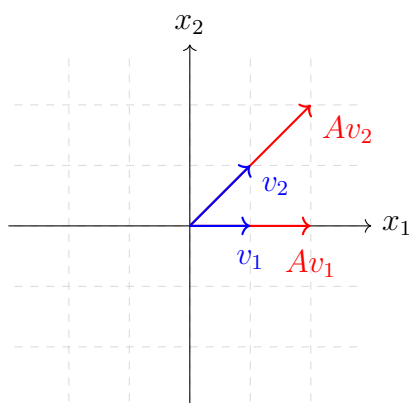
(d) $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Řešení:

- (a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x , tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f .

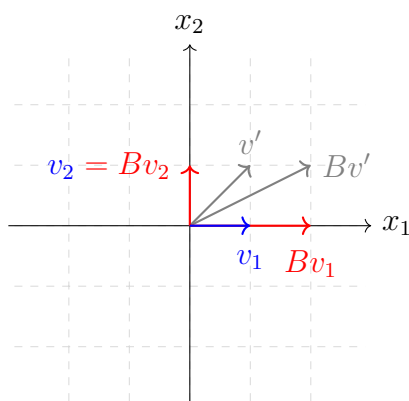


- (b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



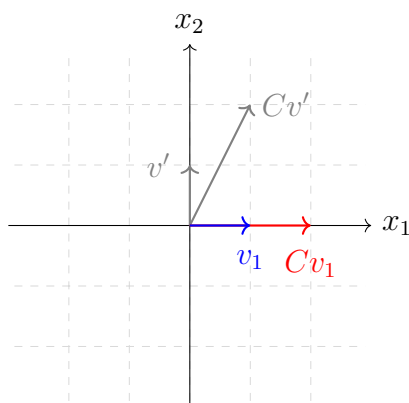
- (c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1 , protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f((\alpha, 0)^T) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

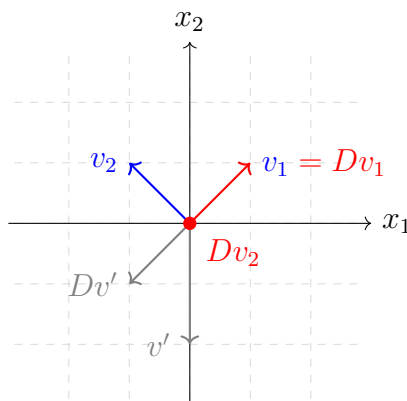
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



- (d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f((x_1, x_2)^T) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D . Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

- (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,
- (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
- (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- (a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.

Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$