

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

- (a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.
- (b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
- (c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Cv. 4.3 Necht' $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ortogonální?

Cv. 4.4 Najděte všechny

- (a) diagonální ortogonální matice řádu n ,
- (b) diagonální unitární matice řádu n .

Kolik jich je?

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

- (a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA ?
- (b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p .
- (c) Dokažte, že P je ortogonální matice.
- (d) Necht' Q je permutační matice odpovídající permutaci q . Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?
- (e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1} ?
- (f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace AP ?

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.
- (b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.