

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 3. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru:

a) $M = \{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Příklad 4. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Příklad 5. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

a) $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,

b) $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,

c) $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 6. Buď $u_1, \dots, u_m$ báze vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \dots, v_n$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$. Najděte bázi $U \times V$ a určete dimenzi tohoto prostoru.

Příklad 7. Spočítejte $\dim(U \cap V)$ pro podprostory $\mathbb{Z}_2^3$:

$$U = \text{span}\{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}, \quad V = \text{span}\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 3. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru:

a) $M = \{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Příklad 4. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Příklad 5. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

a) $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,

b) $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,

c) $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 6. Buď $u_1, \dots, u_m$ báze vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \dots, v_n$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$. Najděte bázi $U \times V$ a určete dimenzi tohoto prostoru.

Příklad 7. Spočítejte $\dim(U \cap V)$ pro podprostory $\mathbb{Z}_2^3$:

$$U = \text{span}\{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}, \quad V = \text{span}\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$