Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x) = 2x - 1$, kde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

b) $f(x, y, z) = (x - y, z)$, kde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

c) $f(x, y) = (0, 0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

d) $f(x, y) = (x^2, y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

e) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,

f) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 2. Najděte obraz vektoru $(-1, 1, 2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1, 0, 0) = (1, 1),\ f(0, 1, 0) = (-1, 2),\ f(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Příklad 3. Nechť $f, g\colon U \to V$ a $h\colon V \to W$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že $f + g$, cf a $h \circ g$ jsou také lineární zobrazení.

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
- $(h \circ g)(x) = h(g(x))$

Příklad 4. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda následující vektory patří do obrazu a jádra f:

a) x^3,

b) 0,

c) 42,

d) $2x - 4x^3$.

Příklad 5. Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině vzhledem ke kanonické bázi:

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu,

b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček,

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Příklad 6. Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi. O zobrazení f je známo, že převádí vektory

$$u_1 = (2, 4, 1)^T,\ u_2 = (2, 3, 4)^T,\ u_3 = (3, 0, 1)^T$$

na vektory

$$f(u_1) = (2, 1, 2)^T,\ f(u_2) = (0, 4, 1)^T,\ f(u_3) = (4, 4, 1)^T.$$

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x) = 2x - 1$, kde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

b) $f(x, y, z) = (x - y, z)$, kde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

c) $f(x, y) = (0, 0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

d) $f(x, y) = (x^2, y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

e) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,

f) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 2. Najděte obraz vektoru $(-1, 1, 2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1, 0, 0) = (1, 1),\ f(0, 1, 0) = (-1, 2),\ f(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Příklad 3. Nechť $f, g\colon U \to V$ a $h\colon V \to W$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že $f + g$, cf a $h \circ g$ jsou také lineární zobrazení.

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
- $(h \circ g)(x) = h(g(x))$

Příklad 4. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda následující vektory patří do obrazu a jádra f:

a) x^3,

b) 0,

c) 42,

d) $2x - 4x^3$.

Příklad 5. Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině vzhledem ke kanonické bázi:

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu,

b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček,

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Příklad 6. Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi. O zobrazení f je známo, že převádí vektory

$$u_1 = (2, 4, 1)^T,\ u_2 = (2, 3, 4)^T,\ u_3 = (3, 0, 1)^T$$

na vektory

$$f(u_1) = (2, 1, 2)^T,\ f(u_2) = (0, 4, 1)^T,\ f(u_3) = (4, 4, 1)^T.$$