Příklad 1. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Příklad 2. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right), \quad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Příklad 3. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

a) ∞ pro každé b,
b) 1 pro každé b,
c) 0 nebo 1 v závislosti na b,
d) 0 nebo ∞ v závislosti na b.

Příklad 4. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right), \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Příklad 5. Spočítejte $A + B$, $2 \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
b) $A \cdot I_n = A$,
c) $e_i^T A = A_{i*}$,
d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
e) $(AB)^T = B^T A^T$,
f) $A(B + C) = AB + AC$,
g) matice $A^T A$ je symetrická.

Příklad 1. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Příklad 2. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right), \quad \text{b)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{c)} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Příklad 3. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

a) ∞ pro každé b,
b) 1 pro každé b,
c) 0 nebo 1 v závislosti na b,
d) 0 nebo ∞ v závislosti na b.

Příklad 4. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right), \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Příklad 5. Spočítejte $A + B$, $2 \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
b) $A \cdot I_n = A$,
c) $e_i^T A = A_{i*}$,
d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
e) $(AB)^T = B^T A^T$,
f) $A(B + C) = AB + AC$,
g) matice $A^T A$ je symetrická.