3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.2 Vyřešte soustavy rovnic $Ax = b$ a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Cv. 3.3 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Cv. 3.4 Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a 0 stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A + B = B + A$

(c) $A + 0 = A$

(d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

(e) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

(f) $A + (-1)A = 0$

(g) $1A = A$

(h) $A(B + C) = AB + AC$

(i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(j) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(k) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$

(l) $(A^T)^T = A$

(m) $A^T A$ je symetrická

(n) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(o) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

(p) $AI_n = A$

Cv. 3.5 Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$.

Komutuje součin matic, pokud jsou obě matice symetrické?

Cv. 3.6 Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.