5. Grupy a tělesa

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(g) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(h) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 5.3 Nechť $(G, \circ)$ je grupa a $x \in G$. Rozhodněte, zda $(G, *)$ je grupou s operací definovanou $a * b = a \circ x \circ b$ pro všechna $a, b \in G$.

Cv. 5.4 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

(a) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým součinem,

(b) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým součinem.

Cv. 5.5 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ a $4/3$ v $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Cv. 5.6 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z \ &= 1, \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 5.7 Nalezněte multiplikativní inverze 9^{-1} a 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{31}$.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.