7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}6\\2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\5\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix}\right\}\bigcap\text{span}\left\{\begin{pmatrix}5\\0\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\6\\6\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Řešení:

Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3. Nyní stačí vyřešit rovnici $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha v_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.)
Odpověď: 49.

Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha v_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \beta_3 w_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix}6&3&0&-5&0&-6\\2&2&1&0&-1&-6\\3&5&6&-3&0&-6\\2&5&3&-4&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&0&2&0&1\\2&2&1&0&6&1\\3&5&6&4&0&1\\2&5&3&3&5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&1&2&6&2\\0&6&6&3&1&4\\0&4&3&5&3&2\\0&2&1&6&0&3\end{pmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&5&1&2&6&2\\0&1&0&2&1&0\\0&0&3&4&6&2\\0&0&1&2&5&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&1&2&6&2\\0&1&0&2&1&0\\0&0&1&2&5&3\\0&0&0&5&5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&6&6\\0&1&0&0&6&0\\0&0&1&0&3&3\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

Pro hodnoty β_i dostaneme vztah $\beta_1 + \beta_2 = 0$ z posledního řádku upravené soustavy, t.j. $\beta_2 = s$, $\beta_3 = t$ pro $s, t \in \mathbb{Z}_7$ a $\beta_1 = -\beta_2 = 6s$. V průniku proto leží 49 vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned}\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 &= 6s \cdot (5,0,3,4)^T + s \cdot (0,1,0,2)^T + t \cdot (6,6,6,0)^T\\ &= s \cdot (2,1,4,5)^T + t \cdot (6,6,6,0)^T \text{ pro } s,t \in \mathbb{Z}_7.\end{aligned}$$

Ekvivalentně můžeme vektory v průniku vyjádřit jako $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Z řešení soustavy dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -6\beta_2 - 6\beta_3 = s + t,\\ \alpha_2 &= -6\beta_2 = s,\\ \alpha_3 &= -3\beta_2 - 3\beta_3 = 4s + 4t\end{aligned}$$

pro $s, t \in \mathbb{Z}_7$. Vektory v průniku lineárních obalů jsou tedy ve tvaru

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 &= (s+t)\cdot(6,2,3,2)^T + s\cdot(3,2,5,5)^T + (4s+4t)\cdot(0,1,6,3)^T\\ &= s \cdot (2,1,4,5)^T + t \cdot (6,6,6,0)^T \text{ pro } s,t \in \mathbb{Z}_7.\end{aligned}$$