8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)$, $(1, -1, 1)$, $(3, 2, -2)$.

(b) $(2, 0, 3)$, $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 1)$.

Cv. 8.2 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$.

(b) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Cv. 8.3 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0, 1, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1, 1)^T$, $(1, 1, 0, 1)^T$, $(1, 1, 1, 0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.5 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Cv. 8.6 Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x-1,\ x-2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2+2x+3,\ x+1,\ x-1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x+1),\ \sin(x+2),\ \sin(x+3)\}$.

(e) $\{\ln(x),\ \log_{10}(2x),\ \log_2(x^2)\}$.