8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)$, $(1,-1,1)$, $(3,2,-2)$.

(b) $(2,0,3)$, $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$.

Řešení:

(a) Hledáme koeficienty $a,b,c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho tedy dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze $a = b = c = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je $a = -t$, $b = 2t$, $c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Tedy například s koeficienty -1, 2 a 1 dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u,\, u+v,\, u+w\}$.

(b) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Řešení:

(a) Obdobně jako v předchozím příkladě hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, aby
$$0 = au + b(u+v) + c(u+w) = (a+b+c)u + bv + cw.$$
Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $a+b+c=0$, $b=0$ a $c=0$ a tedy i $a=0$. Odtud je $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(b) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že
$$0 = a(u-v) + b(u-w) + c(v-w) = (a+b)u + (-a+c)v + (-b-c)w.$$
Tedy $a+b=0$, $-a+c=0$ a $-b-c=0$. Vyřešením dané soustavy dostaneme řešení $a=t, b=-t, c=t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Vektory $\{u-v, u-w, v-w\}$ jsou tedy lineárně závislé, např. s koeficienty $(1,-1,1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Řešení:
Obecně dle definice se nezávislost přenáší „dolů“ a závislost „nahoru“. Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1 \ldots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$
Vezměme $\beta_1, \ldots, \beta_k = (0, \ldots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_k) \neq (0, \ldots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.1, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé a nad $\mathbb{Z}_3$ jsou lineárně závislé. Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa, nad kterým je daný vektorový prostor.

Cv. 8.5 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Mějme 2 vyjádření vektoru x:

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V.

Pokud tedy $U \cap V = \{0\}$, pak $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z čehož, ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x tedy je jednoznačné.

Na druhou stranu, pokud vyjádření x není jednoznačné, pak $u_1 \neq u_2$ nebo $v_1 \neq v_2$ (ve skutečnosti musí nastat obě možnosti). Nechť tedy $u_1 \neq u_2$ (druhý případ je obdobný). Pak ale $u_1 - u_2 \neq 0$. Vektor $u_1 - u_2$ však leží jak v U tak ve V. Průnik $U \cap V$ tedy obsahuje i nenulový vektor.

Cv. 8.6 Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x+1),\ \sin(x+2),\ \sin(x+3)\}$.

(e) $\{\ln(x),\ \log_{10}(2x),\ \log_2(x^2)\}$.

Řešení: