9. Báze a dimenze

Cv. 9.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4^T)$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Řešení:
Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ dáme do sloupců matice a vektor $(3,2,4)^T$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Dostaneme řešení $x_3 = 2$, $x_2 = p$ a $x_1 = 1 + 3p$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1+3p)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ netvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Cv. 9.2 Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2,\ x+x^2,\ x^3-1\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Řešení:

(a) Prostor V má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor (pokud je množina M lineárně nezávislá). Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M. Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze. Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right).$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

(b) Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V, nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

Cv. 9.3 Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_4,\ v_2\}$.

Řešení:

Hledáme taková $(b_1, \dots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3 v_4 + b_4 v_2 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1,\ a_3,\ a_4 - a_1,\ a_2 - a_3)^T$.

Cv. 9.4 Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \operatorname{span}\big\{(4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T, (2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big\}$.

(b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

Řešení:

(a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změníme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T, (0,1,1,0,2,3,1)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T$.

(b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Konkrétně dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešením je

$$x = p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + \\ + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T.$$

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, mj. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T$, $(1,0,2,1,0,0,0)^T$, $(1,0,1,0,1,0,0)^T$, $(1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Cv. 9.5 Rozhodněte, zda prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Řešení:

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \subseteq U$. Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. K tomu stačí zjistit, jestli $\dim(\mathrm{span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

$$\begin{array}{cccc|ccccccc|}
 & & & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{2} & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\
\multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
\multicolumn{1}{|c}{0} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze $U \subsetneq V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V.