10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,

(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Cv. 10.6 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Cv. 10.7 Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?