11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.1 Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je/není lineárním zobrazením.

(a) $f_1(x) = 0$,

(b) $f_2(x) = 1$,

(c) $f_3(x) = 2x$,

(d) $f_4(x) = x + 1$,

(e) $f_5(x) = x^2$.

Řešení:
Dle definice: Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f\colon U \to V$ je lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in T$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Poznámka: Budeme-li na vektorové prostory nahlížet jako na *algebry*, pak je lineární zobrazení *homomorfismem* algeber, což nám z algebraického hlediska přináší silný pohled a interpretaci lineárního zobrazení, jako zobrazení zachovávajícího strukturu.

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:

   i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí

   ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

   Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je tudíž lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:

   i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí

   ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zda-li zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa“ $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

   Ani jedna podmínka není splněna, zobrazení proto není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:

   i. $f_3(x + y) = f_3(z) = 2z = 2(x + y) = 2(x) + 2(y) = f_3(x) + f_3(y)$; podmínka platí

   ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$; podmínka platí.

   Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

Cv. 11.2 Rozhodněte a dokažte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_6(x, y) = (x + y,\, x - y)$,
(b) $f_7(x, y) = (x - y,\, x - y)$.

Řešení:

(a) Analogicky se předchozím příkladem, je však třeba si dát pozor na indexování vektorů. Ano zobrazení f_6 je lineární.

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x + y,\, x - y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení (vůči kanonické bázi).

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Využijeme tvrzení, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. Zobrazení si vyjádříme vůči kanonickým bázím ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$. Vybereme kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$, kterou zobrazením zobrazíme

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\text{kan}}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\text{kan}}.$$

Vyjádřeno vůči kanonické bázi se matice obrazu nezmění je tedy se jedná o matici zobrazení

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) Budeme počítat matici zobrazení vůči kanonickým bázím ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$. A využijeme vyjádření ze znalosti vzoru X a obrazu $FX = Y$.

$$f(X) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ze vztahu $F = YX^{-1}$ vypočteme matici zobrazení

$$F = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned}
f((-1,-3,1)^T) &= (-1,1,0)^T,\\
f((0,3,-2)^T) &= (0,1,-1)^T,\\
f((-1,-2,2)^T) &= (1,0,1^T).
\end{aligned}$$

Řešení:

Matici lineárních zobrazení lze vypočítat i ze znalosti vektorů a jejich obrazů. Mějme množinu vektorů X a jejich obrazů Y. Vektory X je na vektory Y zobrazí maticí lineárního zobrazení F pronásobením $FX = Y$. Je-li matice X regulární, pak existuje její inverzní matice X^{-1}. Upravíme rovnici pronásobením maticí X^{-1} zprava, dostáváme $FXX^{-1} = YX^{-1}$, což se rovná $F = YX^{-1}$.

Matice X je maticí vzorových vektorů zapsaných po sloupcích a matice Y je po sloupcích zapsanou maticí obrazů vektorů:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice X^{-1} k matici X se rovná:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice zobrazení F se rovná:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$