# 12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

**Cv. 12.1** Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f\colon U \to U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}.$$

Vypočtěte matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f$, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,0,3)^T) &= (-2,0,6)^T \\ f((2,-2,2)^T) &= (4,-4,4)^T \\ f((0,1,-3)^T) &= (0,2,-6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí $F$, reprezentující lineární zobrazení $f$, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

***Řešení:***

Využijeme definice matice lineárního zobrazení, maticové reprezentace lineárního zobrazení a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze. Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory $U$ a $V$ na tělesem $T$ a lineární zobrazení $f\colon U \to V$. Vektorový prostor $U$ je popsán bází $B_U = \{x_1,\ldots,x_n\}$ a vektorový prostor $V$ je popsán bází $B_V = \{y_1,\ldots,y_m\}$. *Matice lineárního zobrazení* $f\colon U \to V$ je definována tak, že $j$-tý sloupec ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je $[f(x_j)]_{B_V}$.

Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že $j$-tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru $x_j$ vůči bázi $B_V$, resp. sloupcový vektor $x_j$ zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi $B_V$ tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujme postupně přes všechny bazické vektory.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li $n$ vektorů báze $B_U$ a $m$ vektorů báze $B_V$ kolik bude mít výsledná matice $F$ sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f\colon U \to U$ tedy počítáme s jednou bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice $F$. Mějme první bazický vektor, tj. $x_1 = (-1,0,3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1,0,3)^T) = (-2,0,6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi $B_U$. Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze $B_U$ jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravé strany matice.

Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice $b$ je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné $x$ jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení $x$ udává souřadnice vektoru pravé strany $b$ vůči bázi dané sloupci matice, tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in \mathcal{S}(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)

Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Sloupcové vektory pravé strany matice, tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení $F$:

$$F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor $x$ vyjádřený vůči bází $B_U$, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi $B_U$. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ provedeme zobrazením $f(x) = Fx = [f([x]_{B_U})]_{B_U} = (2, 4, -2)^T$.

**Cv. 12.2** Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru $U$ daného bází $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru $V$ daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

**Cv. 12.3** Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru $U$ do jiného vektorového prostoru $V$? Zobrazení $f\colon U \to V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\},$$
$$B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}.$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

***Řešení:***

Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ z definice.

Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření obrazů vektorů, kde místo báze $B_U$ vyjadřujeme vektoru vůči bázi $B_V$, do které zobrazení zobrazuje.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Zobrazme zadaný vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[f]_{B_U}$. Řešení:

$$[f([x]_{B_U})]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U} = Fx = (2, -12, 8)^T.$$

**Cv. 12.4** Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi $B_V$, tj. $[x]_{B_V}$.

***Řešení:***

Počítáme *matici přechodu* ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ od báze $B_U$ vektorového prostoru $U$ k bázi $B_V$ vektorového prostoru $V$.

Mnemotechnická pomůcka výpočtu: $(B_V|B_U) \overset{RREF}{\sim} (I_n \mid {}_{B_V}[id]_{B_U}))$.

Postup obdobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v kroku, kdy nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Do výpočtu matice lineárního zobrazení dle definice dosadíme takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[id]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Zobrazme zadaný konkrétní vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[id]_{B_U}$. Řešení:

$$ {}_{B_V}[id]_{B_U}\,[x]_{B_U} = [id([x]_{B_U})]_{B_V} = (1, -6, 4)^T. $$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi soustavou přes lineární kombinaci.

**Cv. 12.5** V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze $B_V$ k bázi $B_U$? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi $B_U$, tj. $[x]_{B_U}$.

***Řešení:***

V předchozím postupu zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření do báze.

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right). $$

Výsledná matice $F = {}_{B_U}[id]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: ${}_{B_U}[id]_{B_V}\,[x]_{B_V} = (1, 2, -1)^T$.

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi.

**Cv. 12.6** Jiný způsob výpočtu: Vypočtěte matici přechodu od báze $B_V$ k bázi $B_U$ pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

***Řešení:***

Vyžijeme teorie: Buď $U$ a $V$ vektorové prostory a $f\colon U \to V$ isomorfismus, pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Předpokládejme nyní, že víme, že zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ je isomorfismus.

$$ {}_{B_U}[id^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[id]_{B_U})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Čímž jsme spočítali matici přechodu dvěma způsoby: a) výpočtem z definice matice lineárního zobrazení, b) výpočet inverzního zobrazení v případě izomorfního zobrazení.

**Cv. 12.7** Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi $B_V$.

***Řešení:***
Způsoby řešení již známe více:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B_V}[f]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[f]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[id]_{B_V}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi $B_V$ se zobrazí maticí přechodu ${}_{B_U}[id]_{B_V}$ vůči bázi $B_U$, následně se transformuje maticí ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ vůči bázi $B_V$.

**Cv. 12.8** Mějme matici $M$ lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice $M$?

***Řešení:***
Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice $M$ reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

**Cv. 12.9** Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(-1,0,3)^T,\, (2,-2,2)^T,\, (0,1,-3)^T\},$$
$$B_V = \{-x^2 + x,\, x - 1,\, x^2 + 1\}.$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

***Řešení:***

(a) Protože $\operatorname{rank}(F) = 2$ a pro každé lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je $\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(f(U))$, tudíž $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - \operatorname{rank}(F) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne, že zobrazení $f$ není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí $F$ není prosté, protože $F$ nemá lineárně nezávislé sloupce.

(b) Víme, že platí $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(F)) = \operatorname{rank}(F)$, kde $\dim(f(U))$ určuje dimenzí obrazu zobrazení $f$. Z hodnoty dimenze vektorového prostoru $\mathcal{P}^2$, které má dimenzi $\dim(\mathcal{P}^2) = 3$, platí $\dim(f(U)) < \dim(\mathcal{P}^2)$. Proto není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí $F$ není „na“ protože, dle $F$ nemá lineárně nezávislé řádky.

**Cv. 12.10** Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

(a) $f(x) = f(y) = (-1, -1, 1)^T$,

(b) $f(x) = f(y)$.

***<u>Řešení</u>:***

(a) V řeči lineárních zobrazení hledáme vektor $x$, který se zobrazí zobrazením $f$ na zadaný vektor $b = f(x)$ V řeči:

i. lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{f}} f(x)$

ii. matic lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{A}} b$

iii. maticových reprezentací soustav lineárních rovnic $Ax = b$; přičemž, lze-li soustavu lineárních rovnic vyřešit, platí $b \in \mathcal{S}(A)$, tedy $b$ je lineární kombinací sloupcových vektorů matice $A$, kde řešení $x$ udává „naškálování“ těchto vektorů.

Sestavíme a vyřešíme soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Z řešení vidíme, že matice má netriviální kernel a tedy nekonečno řešení. Určíme si dvě konkrétní řešení např. $x = (1, -1, 0)^T$, $y = (0, -2, -1)^T$. Můžeme provést kontrolu zobrazením vektorů. Tyto vektory jsou souřadnice vektorů vůči bázi $B$.

(b) V tomto případě nemáme zadaný vektor $f(x) = f(y)$, ke kterému hledáme vzor. Co s tím? Přibyl nám jeden volný parametr. Dílčím řešením úlohy je, jeden vektor $f(x)$ zvolit. Víme ale pak, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$, resp. že má soustava řešení? Zvolme tedy $f(x)$ takové, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$. Zvolíme si náhodný vektor (výběru sloupců matice $A$ – sloupcová interpretace řešení soustav lineárních rovnic), např. $x = (1, -1, 0)^T$ (zvolena byla taková čísla, aby se s nimi dobře počítalo), a vypočteme jeho obraz $f(x) = Ax$. (Což je způsob, jak byl zkonstruován tento příklad.) Přičemž situaci převádíme na předchozí případ.