12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f\colon U \to U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}.$$

Vypočtěte matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,0,3)^T) &= (-2,0,6)^T \\ f((2,-2,2)^T) &= (4,-4,4)^T \\ f((0,1,-3)^T) &= (0,2,-6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bází $B_U = \{x_1 = (-1,0,3)^T,\ x_2 = (2,-2,2)^T,\ x_3 = (0,1,-3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1,1,0)^T, y_2 = (0,1,-1)^T, y_3 = (1,0,1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V? Zobrazení $f\colon U \to V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$\begin{aligned} B_U &= \{x_1 = (-1,0,3)^T,\ x_2 = (2,-2,2)^T,\ x_3 = (0,1,-3)^T\}, \\ B_V &= \{y_1 = (-1,1,0)^T,\ y_2 = (0,1,-1)^T,\ y_3 = (1,0,1)^T\}. \end{aligned}$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V, tj. $[x]_{B_V}$.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U, tj. $[x]_{B_U}$.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_U &= \{(-1,0,3)^T,\ (2,-2,2)^T,\ (0,1,-3)^T\}, \\ B_V &= \{-x^2+x,\ x-1,\ x^2+1\}. \end{aligned}$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

(a) $f(x) = f(y) = (-3,-1,0)^T$

(b) $f(x) = f(y)$