

Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

- (a) $v \in \text{Ker}(A)$,
- (b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:

Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n; Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax; x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1, 2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$:

- (a) vektor v nepatří do jádra matice A , protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- (b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A , protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1, 2)^T = \frac{3}{5}(1, 3)^T + \frac{1}{5}(2, 1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

- (a) vektor v patří do $\text{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- (b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

- (a) vektor v nepatří $\text{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1, 2)^T = 2(1, 3)^T + 3(2, 1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Převědeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru $\text{RREF}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1, 2, 0, 1)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\text{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice $\text{RREF}(A)$ je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A , které odpovídají bázi sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázi sloupců jsou první a třetí, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$ a $(2, 1, 1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupcový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\text{RREF}(A))$ tvoří první a třetí sloupec matice $\text{RREF}(A)$, proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A .

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebáziických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2, 1, 0, 0)^T x_2 + (-1, 0, -1, 1)^T x_4.$$

Bázi $\text{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2, 1, 0, 0)^T$, $(-1, 0, -1, 1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

- (a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T$, $(1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$,
- (b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$.

Řešení:

- (a) Tento příklad je zaměřený na kreativitu a ne na postup podle šablony. Proto popíšeme jen základní myšlenky, které pomohou hledanou matici najít. Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2 . Dále, z podmínek na řádkový prostor dostáváme $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, neboli stačí, aby matice A měla lineárně nezávislé sloupce. Pokud dáme vektory z podmínky na $\mathcal{S}(A)$ přímo do sloupců matice A , získáme požadovanou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice ale není zdaleka jednoznačná. Požadovanou vlastnost splňují další matice, jako například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) V tomto případě hledáme matici 3×3 , pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \text{rank}(A) = 1, \quad \dim \text{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnoty matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = n.$$

V našem případě dostáváme $1 + 1 = \dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = 3$. Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- (a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$,
 (b) $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

- (a) Tvrzení neplatí. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\text{span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \text{span}\{(0, 0)^T, (1, 0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani tato opačná implikace. Například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B) = A$, ale přitom

$$\text{span} \{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \text{span} \{(0, 1)^T, (0, 0)^T\}.$$

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Řešení:

Prostor V odpovídá množině řešení soustavy

$$(1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \mid 0),$$

to znamená jádru matice $A = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$. Tato matice má rozměr $1 \times n$ a má hodnotu 1. Pro dimenzi jádra použijeme vzoreček (věta o dimenzi jádra a hodnoty matice):

$$\dim V = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rank}(A) = n - 1.$$

Závěr: Hledaná dimenze je tedy $n - 1$.

Kdybychom chtěli najít i bázi, tak jednoduše vyřešíme soustavu $Ax = 0$ pomocí Gaussovy eliminace. Bázi tak tvoří například vektory $(1, -1, 0, \dots, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)^T$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1, -1)^T$.

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:

Zapišeme jednotlivé vektory do sloupců matice A , kterou převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{RREF}(A).$$

Připomeňme, že elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost a nezávislost mezi sloupci, a to dokonce i konkrétní lineární kombinace. Tudíž z matice $\text{RREF}(A)$ snadno vyčteme nejen bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$, ale i hledané souřadnice.

Vidíme, že báze sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice $\text{RREF}(A)$ dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, neboť platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)^T$.

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\text{Ker}(AB)$ a $\text{Ker}(B)$ pro matice

- (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,
- (b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Řešení:

- (a) Nechť $x \in \text{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB , protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\text{Ker}(B) \subseteq \text{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \dots, 0)^T$ v jádru matice AB , ale nikoliv v jádru matice B .

- (b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\text{Ker}(AB) \subseteq \text{Ker}(B)$, a tedy můžeme psát $\text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B)$.

Důkaz. Nechť $x \in \text{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1} , pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A B)x) = A^{-1}o = o,$$

z čehož plyne $x \in \text{Ker}(B)$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B , tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je

$$\dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\text{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$